PHƯƠNG PHÁP THẾ TRONG PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bùi Ngọc Diệp

Trường Trung học phổ thông Chuyên Lào Cai

Phương trình hàm là một trong những lĩnh vực hay và khó của toán sơ cấp. Chủ đề này thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia và kỳ thi Olympic toán Quốc tế. Chuyên đề giới thiệu "Phương pháp thế", một trong những phương pháp chủ yếu để giải quyết các bài toán phương trình hàm.

1. MỞ ĐẦU

Đối với các phương trình đại số trong sách giáo khoa, mục tiêu của chúng ta là tìm các biến chưa biết nhưng đối với phương trình hàm chúng ta cần phải tìm một "hàm số" thỏa mãn một số điều kiện ràng buộc cho trước của bài toán. Chúng ta có nhiều phương pháp cũng như hướng tiếp cận khác nhau đối với các bài toán thuộc chủ đề này trong đó, phương pháp thế là phương pháp thông dụng nhất khi giải phương trình hàm và kĩ thuật của nó còn được sử dụng khi chúng ta sử dụng các phương pháp khác. Nội dung cơ bản của phương pháp này là thay các biến bởi các giá trị đặc biệt. Từ những kết quả vừa thiết lập bằng việc thay biến đó, chúng ta sẽ cố gắng xây dựng các ràng buộc hoặc sử dụng trực tiếp các kết quả này để tìm hàm số chưa biết. Điều quan trọng phải lưu ý là giá trị các biến này phải thuộc tập xác định của hàm số và phải thỏa mãn các điều kiện ràng buộc giữa các biến nếu có. Không có bất cứ một "kĩ thuật" tổng quát nào của phương pháp thế để giải quyết các bài toán phương tình hàm. Khi đứng trước các bài toán liên quan đến chủ đề này, học sinh cần phải có cái nhìn tổng quan cũng như những kinh nghiệm và sự nhảy cảm để có thể đưa ra việc thay các biến sao cho phù hợp. Chúng tôi nhắc lại một số kĩ thuật cũng như chú ý cần thiết khi sử dụng phương pháp thế để giải quyết các bài toán về phương trình hàm.

(i) Sau khi tìm được nghiệm hàm của phương trình, chúng ta phải thử lại rồi mới kết luận. Chú ý rằng, quá trình tìm nghiệm chỉ là "điều kiện cần" chứ không phải là "điều kiện đủ".

(ii) Nếu một bộ phận nào đó của phương trình hàm đã cho có tính đối xứng giữa các biến, chẳng hạn như x, y. Chúng nên hoán vị giữa x và y nghĩa là thay x bởi y và thay y bởi x vào điều kiện ban đầu của bài toán.

(iii) Phép đặt "tổng-hiệu"
$$u = x + y, \quad v = x - y$$
là một trong những phép đặt cơ bản thường được sử dụng đối với các phương trình hàm mà biểu thức thành phần của nó là các đa thức đối xứng giữa x và y (tức là các đa thức mà khi ta hoán vị giữa các biến, ta được đa thức mới bằng đa thức ban đầu.)

(iv) Các tính chất cơ bản hàm số như đơn ánh, toàn ánh, song ánh cần phải được nắm vững và vận dụng một cách linh hoạt. Trong nhiều bài toán của phương pháp thế chúng ta cần phải vận dụng được tính chất này để có thể tìm ra giá trị của hàm số tại những điểm đặc biệt.

(v) Chúng ta nên dự đoán được một nghiệm nào đó của phương trình. Từ những dự đoán này chúng ta sẽ có những định hướng cụ thể để đưa ra các phép thế phù hợp hoặc tìm ra các tính chất của nghiệm hàm.

Mục tiêu của bài viết này là giới thiệu phương pháp thế với những kĩ thuật đặc trưng của nó thông qua các ví dụ cụ thể thông qua một số bài toán phương trình hàm đã xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Phần còn lại của bài viết được bố cục như sau: Mục 2 chúng tôi giới thiệu phương pháp thế qua các ví dụ cụ thể, Mục 3 là các bài tập có sử dụng phương pháp thế.

2. PHƯƠNG PHÁP THẾ QUA CÁC BÀI TOÁN

Chúng ta sẽ bắt đầu với bài toán trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 (VMO) năm 2013.

Bài toán 1. (VMO 2013). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(0)=0, f(1)=2013,$$
$$(x-y)\left[f\left(f^2(x)\right)-f\left(f^2(y)\right)\right]=\left[f(x)-f(y)\right]\left[f^2(x)-f^2(y)\right] \tag{2.1}$$

đúng với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ và $f^2(x)=\left(f(x)\right)^2$.

Lời giải. Từ (2.1) thay $x\neq 0$ và $y=0$, ta được

$$xf\left(f^2(x)\right)=f^3(x),\quad \forall x\neq 0.$$

Điều nay suy ra với $\forall x\neq 0$, ta có

$$f\left(f^2(x)\right)=\frac{f^3(x)}{x},\quad \forall x\neq 0. \tag{2.2}$$

Thay (2.2) vào (2.1), với mọi $x\neq 0$, $y\neq 0$, ta được

$$(x-y)\left[\frac{f^3(x)}{x}-\frac{f^3(y)}{y}\right]=\left[f(x)-f(y)\right]\left[f^2(x)-f^2(y)\right]. \tag{2.3}$$

Ta thấy rằng

$$
\begin{aligned}
&(x-y)\left[\frac{f^3(x)}{x}-\frac{f^3(y)}{y}\right]-\left[f(x)-f(y)\right]\left[f^2(x)-f^2(y)\right]\\
&=f^3(x)-\frac{xf^3(y)}{y}-\frac{yf^3(x)}{x}+f^3(y)-f^3(x)+f(x)f^2(y)+f(y)f^2(x)-f^3(y)\\
&=\left[f(x)f^2(y)-\frac{xf^3(y)}{y}\right]+\left[f(y)f^2(x)-\frac{yf^3(x)}{x}\right]\\
&=f^2(y)\left[f(x)-\frac{xf(y)}{y}\right]+f^2(x)\left[f(y)-\frac{yf(x)}{x}\right]\\
&=f^2(x)\frac{xf(y)-yf(x)}{x}-f^2(y)\frac{xf(y)-yf(x)}{y}\\
&=\left[xf(y)-yf(x)\right]\left[\frac{f^2(x)}{x}-\frac{f^2(y)}{y}\right],\quad \forall x\neq 0, y\neq 0. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Kết hợp (2.3) và (2.4), ta được

$$\left[xf(y)-yf(x)\right]\left[xf^2(y)-yf^2(x)\right]=0,\quad \forall x\neq 0, y\neq 0. \qquad (2.5)$$

Từ (2.5) thay $y=1$ ta có

$$\big(2013x-f(x)\big)\left[2013^2x-f^2(x)\right]=0,\quad \forall x\neq 0. \qquad (2.6)$$

Nếu $x<0$ thì

$$2013^2x-f^2(x)<-f^2(x)<0.$$

Khi đó, từ (2.6) ta được

$$f(x)=2013x,\quad \forall x<0.$$

Do đó, từ (5) thay $y=-1$ ta có

$$[-2013x+f(x)][2013^2x+f^2(x)]=0,\quad x\neq 0. \qquad (2.7)$$

Nếu $x>0$ thì

$$2013^2x-f^2(x)>-f^2(x)>0.$$

Khi đó, từ (2.7) ta được

$$f(x)=2013x,\quad \forall x>0.$$

Chú ý rằng $f(0)=0$. Vì vậy, ta có $f(x)=2013x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Thử lại, ta thấy rằng nếu $f(x)=2013x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì khi đó

$$
\begin{aligned}
&f(0)=0, f(1)=2013,\\
&\left[f(x)-f(y)\right]\left[f^2(x)-f^2(y)\right]=[2013x-2013y]\left[2013^2x^2-2013^2y^2\right]\\
&\qquad=(x-y)\left[f\left(f^2(x)\right)-f\left(f^2(y)\right)\right],\quad \forall x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2013x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét. Thông thường khi đứng trước một bài toán phương trình hàm, chúng ta thường "cố gắng" tìm được những giá trị đặc biệt của hàm số như $f(0), f(1), f(-1), ...$ với mục đích là tạo thêm "ràng buộc" cũng như dự đoán được "hình dáng" cũng như "tính chất" nghiệm "hàm" cần tìm. Nhưng đối với bài toán trên, giả thiết đã cho luôn $f(0) = 0$. Vì thế, ý tưởng đầu tiên khi giải bài toán là phải "lợi dụng" được $f(0) = 0$. Điều kiện này đã làm cho bài toán đơn giản hơn rất nhiều. Một câu hỏi được đặt ra cho bạn đọc là "nếu không có yếu tố $f(0) = 0$ thì chúng ta sẽ giải quyết bài toán trên như thế nào". Về điều kiện thứ hai của bài toán $f(1) = 1$, chúng ta có thể thấy rằng nó giúp cho bài toán có hình thức đẹp hơn (khi có con số của năm thi xuất hiện trong đề thi) và cũng giúp học sinh có thêm phương án khi xử lý tình huống

$$\left[xf(y) - yf(x)\right]\left[xf^2(y) - yf^2(x)\right] = 0, \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Đây là một trong những "tình huống điển hình" thường xuyên xuất hiện trong các bài toán phương trình hàm của các đề thi học sinh Quốc gia. Nếu không có giả thiết $f(1) = 1$, chúng ta vẫn có thể hoàn toàn giải quyết trọn vẹn, nhưng lời giả sẽ phức tạp hơn lời giải được đưa ra ở trên. Từ (2.4), chúng ta có

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(x)}{x} \quad \text{hoặc} \quad \frac{f^2(x)}{x} = \frac{f^2(y)}{y}$$

với $\forall x \neq 0, y \neq 0$. Điều này giúp chúng ta có thể nhìn thấy ngay rằng nghiệm của bài toán sẽ có dạng $f(x) = cx$. Vì một vế chỉ phụ thuộc vào x và một vế chỉ phụ thuộc vào y nên chúng phải bằng hằng số. Đây cũng chính là nội dung của kĩ thuật thường được sử dụng trong phương pháp thế có tên gọi là "phân ly biến số", kĩ thuật này bắt nguồn từ môn học "Phương trình vi phân" ở bậc Đại học. Nó tỏ ra vô cùng "tối ưu" khi giải quyết một số bài toán, ví dụ như bài toán dưới đây là đề thi Olympic Toán sinh viên Toàn Quốc năm 2011 được tổ chức tại thành phố Quy Nhơn.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy\left(x^2 + y^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Với những phương trình hàm có biến tự do (tức là các phương trình mà hai vế của nó có xuất hiện các biểu thức chỉ chứa các thành phần là x và y) thì chúng ta thường cố gắng "thế biến" một cách hợp lí để có tính được các giá trị tại các điểm đặc biệt của hàm số như $0, -1, 1, ...$ Sau khi tính được các giá trị này, chúng ta sẽ sử dụng nó để tìm hàm mà bài toán yêu cầu. Bài toán tiếp theo sẽ giúp bạn đọc hình dung rõ hơn về vấn đề này.

Bài toán 2. (VMO 2016). Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

i) $f(1) = 2016$.

ii) Với mọi x, $y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x + y + f(y)\right) = f(x) + ay. \tag{2.8}$$

Lời giải. Nếu $a = 0$ thì từ (2.8), ta được

$$f(x + 2017) = f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, f là một hàm tuần hoàn chu kì 2017. Vì $f(1) = 2016$, nên

$$f(x) = 2016 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta xét trường hợp $a \neq 0$ thì trong (2.8) hoán vị vai trò của x và y ta được

$$f\big(x + y + f(x)\big) = f(y) + ax, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Nếu $f(x) = f(y)$ thì từ (2.8) và (2.9) ta suy ra $x = y$ hay f là một đơn ánh. Trong (2.8) cho $y = 0$, ta có

$$f(x + f(0)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là đơn ảnh nên

$$x + f(0) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có $f(0) = 0$. Trong (2.8) thay $x = 0, y = 1$ ta được $a = f(2017)$. Tiếp tục thay y bởi $\dfrac{-f(x)}{a}$ trong (2.8), ta được

$$f\left(x - \frac{f(x)}{a} + f\left(\frac{-f(x)}{a}\right)\right) = f(x) - f(x) = 0 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là hàm đơn ánh nên

$$x - \frac{f(x)}{a} + f\left(\frac{-f(x)}{a}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$f\left(\frac{-f(x)}{a}\right) = \frac{f(x)}{a} - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Trong (2.8) thay y bởi $\frac{-f(y)}{a}$ ta được

$$f\left(x - \frac{f(y)}{a} + f\left(\frac{-f(y)}{a}\right)\right) = f(x) - f(y) \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Sử dụng (2.10) kết hợp với (2.11) ta có

$$f\left(x + \frac{f(y)}{a} - y - \frac{f(y)}{a}\right) = f(x) - f(y), \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Trong (2.12) thay x bởi $x+y$ ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(n) = nf(1) = 2016n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó,

$$a = f(2017) = 2016.2017.$$

Khi đó ta có hàm số $f(x) = 2016x$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Thật vậy, với $f(x) = 2016x, \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} f(1) = 2016, \\ f\big(x + y + f(x)\big) = 2016x + 2016.2017x = f(y) + ax, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vậy $a = 0$ và $a = 2016$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. Trong bài toán này để tính được giá trị của hàm số tại điểm $x = 0$ chúng ta đã sử dụng tính đơn ánh của hàm số. Việc nhận ra f đơn ánh là dễ dàng. Sau khi đã tính được $f(0)$ thì việc thế các giá trị như thế nào để có thể "tận dụng" được kết quả $f(0) = 0$ là tự nhiên. Chúng ta nhắc lại các tính chất cơ bản của một hàm số thường được dùng xuyên suốt trong các bài toán giải phương trình hàm. Hàm số f đi từ miền xác định $D \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ được gọi là đơn ánh nếu $f(x) = f(y)$ thì $x = y$ với $\forall x, y \in D$. Hàm số f được gọi là toàn ánh nếu với $z \in \mathbb{R}$ tồn tại $x \in D$ sao cho $z = f(x)$. Hàm số f là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

Nếu bài toán có thêm giả thiết f là một hàm số liên tục hoặc đơn điệu trên tập xác định thì ta có thể kết luận hàm số

$$f(x) = 2016x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

là nghiệm của phương trình trong trường hợp $a \neq 0$ vì hàm số f là một hàm cộng tính và $f(1) = 2016$. Chú ý rằng nếu phương trình hàm của bài toán là một phương trình có dạng "đối xứng" giữa các biến (ví dụ như bài toán 2) ta thường dùng phép thế thay x bởi y và thay y bởi x, tức là hoán đổi vai trò của x, y trong phương trình ban đầu để có thể chứng minh được tính đơn ánh của nó.

Đôi khi, trong một số bài toán về phương trình hàm, chúng ta không thể tính trực tiếp được các giá trị tại các điểm đặc biệt của hàm số, ta thường đặt chúng như là các tham số, ví dụ đặt $f(0) = m$ rồi thế biến của phương trình bởi chính các giá trị của tham số này với mục tiêu là có thể tìm được chúng. Bài toán tiếp theo xuất hiện Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia dự môn Toán lớp 12 năm 2005 sẽ minh họa cho kĩ thuật này.

Bài toán 3. (VMO 2005 A). Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức:

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy \tag{2.13}$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải.

Giả sử $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, nghĩa là

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

với mọi số thực x, y. Đặt $f(0) = a$. Thế $x = y = 0$ vào (2.13) ta được

$$f(a) = a^2. \tag{2.14}$$

Thế $x = y$ vào (2.13) với lưu ý tới (2.14) ta được:

$$\big(f(x)\big)^2 = x^2 + a^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Suy ra $\big(f(x)\big)^2 = \big(f(-x)\big)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ hay

$$\big(f(x) - f(-x)\big)\big(f(x) + f(-x)\big) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$. Thế $y = 0$ vào (2.13) ta được:

$$f\big(f(x)\big) = af(x) - f(x) + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Thế $x = 0, y = -x$ vào (2.13) ta được:

$$f\big(f(x)\big) = af(-x) - f(-x) - a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Từ (2.17) và (2.18) suy ra

$$a\big(f(-x) - f(x)\big) + f(x) + f(-x) = 2a, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Thế $x = x_0$ vào (2.19) ta được

$$f(x_0) = a. \tag{*}$$

Mặt khác, từ (2.15) suy ra nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1^2 = x_2^2$. Vì thế , từ (*) suy ra $x_0 = 0$, trái với giả thiết $x_0 \neq 0$. Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq f(-x), \forall x \neq 0$. Do đó, từ (2.16) ta suy ra

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \neq 0 \tag{2.20}$$

Thế (2.20) vào (2.19)ta được: $a(f(x) - 1) = 0, \forall x \neq 0$. Suy ra $a = 0$, vì nếu ngược lại $a \neq 0$ thì $f(x) = 1, \forall x \neq 0$ trái với (2.20). Do đó, từ (2.15) ta có:

$$(f(x))^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$. Khi đó, theo (2.17) ta phải có:

$$x_0 = f(x_0) = -f(f(x_0)) = -f(x_0) = -f(x_0) = -x_0.$$

Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq x, \forall x \neq 0$. Vì vậy, từ (2.21) ta được $f(x) = -x_0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ngược lại, kiểm tra trực tiếp, ta hấy hàm số tìm được ở trên thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Vậy hàm số $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Nhận xét. Giống như bài toán trước, bài toán này chúng ta lại gặp một tình huống "kinh điển" khi giải quyết các bài toán liên quan đến phương trình hàm là

$$\big[f(x)+x\big]\big[f(x)-x\big]=0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ đẳng thức trên, chúng ta chỉ có thể kết luận được rằng là giá trị của hàm f tại x và $-x$, chứ không thể suy ra được các hàm số thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi gặp trường hợp này chúng ta thường xử lý như sau, kiểm tra xem các hàm số $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$ có thỏa mãn yêu cầu đề bài hay không, sau đó chứng minh ngoài hàm này ra không còn hàm nào khác thỏa mãn yêu cầu bài toán. Phương pháp thường dùng ở đây được dùng là phản chứng. Tìn huống này đã xuất hiện trong một bài phương trình hàm ở các kỳ thi VMO trước đó.

(VMO 2002 B). Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f\big(y-f(x)\big)=f\big(x^{2012}-y\big)-2001yf(x),\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(VMO 2007). Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x+y)=f(x).3^{b^y+f(y)-1}+b^x\left(3^{b^y+f(y)-1}-b^y\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài tiếp theo nằm trong đề thi Chọn học sinh giỏi Quốc gia dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2014 (VNTST 2014), có cùng "ý tưởng" tìm ra giá trị $f(0)$ như bài toán số 3.

Bài toán 4. (VNTST 2014) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f\big(2m+f(m)+f(m)f(n)\big)=nf(m)+m,\quad \forall m,n\in\mathbb{Z}.\tag{2.22}$$

Lời giải. Giả sử $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, nghĩa là

$$f\big(2m+f(m)+f(m)f(n)\big)=nf(m)+m,\quad \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Đặt $a=f(0)$. Giả sử $f\equiv 0$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó từ (2.22), chúng ta thấy rằng

$$m=0,\quad \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Điều này là vô lý, do đó $f\equiv 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Vì vậy tồn tại $q\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(q)\neq 0$. Thay $m=q$ vào đẳng thức (2.22) ta được

$$f\big(2q+f(q)+f(q)f(n)\big)=nf(q)+q,\quad \forall n\in\mathbb{Z}.\tag{2.23}$$

Nếu $f(n_1)=f(n_2)\ \forall n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ thì từ (2.23), chúng ta được $n_1=n_2$. Do đó, f là một hàm đơn ánh. Thay $n=0$ vào (2.23), ta được

$$f\big(2m+(a+1)f(m)\big)=m,\quad \forall m\in\mathbb{Z}.\tag{2.24}$$

Với $\forall m \in \mathbb{Z}$, tồn tại $u = 2m + (a+1)f(m) \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn rằng $f(u) = m$. Do đó, f là một toàn ánh. Vì vậy tồn tại $b \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(b) = -1$. Thay $m = n = b$ vào (2.22), ta được $f(2b) = 0$. Thay $m = n = 0$ vào (2.22), ta cũng có $f(a^2 + a) = 0$. Do đó, ta có

$$f(a^2 + a) = 0 = f(2b).$$

Vì f là một đơn ánh, ta được

$$b = \frac{a^2 + a}{2}.$$

Mặt khác, thay $n = b$ vào (2.22), ta được

$$f(2m) = \frac{a^2 + a}{2} f(m) + m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

Thay m = 0 vào (2.22), ta được

$$f\left(af(n) + a\right) = an, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Thay $m = an$ vào (2.24) rồi kết hợp với đẳng thức trên, ta suy ra

$$(a+1)f(an) + 2an = af(n) + a, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.26}$$

Thay $n = b$, ta được

$$\frac{a(a^2 + a)}{2} = f(0) = a,$$

do đó ta có $a \in \{0, 1, -2\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1$ thì từ (2.26), ta được

  $$f(n) = 1 - 2n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

  Tuy nhiên, hàm số này không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- Nếu $a = 0$ thì từ (2.25), ta có

  $$f(2m) = m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

  Kết hợp với kết quả (2.24), ta được

  $$f(m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

  vô lý theo chứng minh ở trên.

- Nếu $a = -2$, thì từ (2.26) ta có

  $$f(-2n) + 4n = 2f(n) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

  Từ (2.25), ta được

  $$f(-2n) = f(-n) - n.$$

Do đó, ta có

$$f(-n) + 3n = 2f(n) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Thay n bởi $-n$ vào đẳng thức trên, ta cũng có

$$f(n) - 3n = 2f(-n) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp hai điều này lại, ta suy ra $f(n) = n - 2, \forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(n) = n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét. Ở bài toán trên nếu chúng ta dự đoán được nghiệm hàm là $f(n) = n - 2$ thì chúng ta sẽ có những định hướng rất rõ ràng trong thế biến để tìm ra được các giá trị đặc biệt. Đứng trước một bài toán phương trình hàm, chúng ta luôn "mò mẫm" tìm nghiêm trong lớp các hàm đa thức. Quan sát thấy rằng, nếu $f(n)$ là một hàm đa thức thì bậc của $f(n)$ phải nhỏ hơn hoặc bằng 1 vì nếu không vế trái của phương trình hàm ban đầu sẽ có bậc lớn hơn vế phải. Từ kết quả này chúng ta đặt $f(n) = an + b$ rồi thay vào (2.22), ta sẽ tìm được $a = 1$, và $b = -2$. Rõ ràng nếu chúng ta tính được $f(0)$ thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản. Nhưng $f(0)$ không thể tính được trực tiếp thông qua các phép thế các giá trị đặc biệt nên ở đây chúng ta đã phải đặt $a = f(0)$. Tính chất đơn ánh và toàn ánh được nhận thấy khá dễ dàng và nó là một công cụ đắc lực trong việc hỗ trợ chúng ta tìm được a. Từ cách giải trên, chúng ta có thể nhận ngay rằng kết quả bài toán đúng trên cả tập thực $\mathbb{R}$.

Trong một số bài toán về phương trình hàm, chúng ta sẽ cố gắng tìm phép thế "triệt tiêu", đây là phép thế giúp chúng ta có thể giản ước biểu thức chứa f ở cả hai vế của phương trình. Từ đó, chúng ta sẽ được một phương trình hàm đơn giản hơn.

Bài toán 5. (Olympic Toán học Châu Âu dành cho nữ năm 2012) Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1), \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{2.27}$$

Lời giải. Để cho thuận tiện, chúng ta sẽ sử dụng kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (2.27). Ví dụ $P(1, 1)$ là chỉ việc thay $x = 1$ và $y = 1$ vào (2.27). Giả sử $\frac{f(y)-1}{y-1} > 0$, khi đó với phép thay $P\left(\frac{f(y)-1}{y-1}, y\right)$, ta được

$$f\left(\frac{yf(y) - 1}{y - 1}\right) = yf\left(\frac{yf(y) - 1}{y - 1}\right), \quad \forall y \in (0; +\infty). \tag{2.28}$$

Điều này chứng tỏ rằng $y = 1, \forall y \in (0; +\infty)$. Đây là điều vô lý. Do đó

$$\frac{f(y) - 1}{y - 1} < 0, \ \forall y \in (0; +\infty) \setminus \{1\}. \tag{2.29}$$

Xét $y > 1$. Với phép thay $P\left(1 - \frac{1}{y}, y\right)$, ta có

$$f\left(1 - \frac{1}{y} + f(y)\right) = yf(y), \quad \forall y > 1. \tag{2.30}$$

Ta xét các trường hợp dưới đây.

Nếu $f(y) > \frac{1}{y}$ thì $1 + f(y) - \frac{1}{y} > 1$. Do đó, ta có

$$f\left(1 + f(y) - \frac{1}{y}\right) = yf(y) > 1 \quad ,\forall y > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.29).

Nếu $f(y) < \dfrac{1}{y}$ thì $0 < 1 + f(y) - \dfrac{1}{y} < 1$. Do đó, ta có

$$f\left(1 + f(y) - \frac{1}{y}\right) = yf(y) < 1, \quad \forall y > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.29). Từ hai trường hợp trên ta kết luận rằng

$$f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 1.$$

Bây giờ, xét $x > 0$, ta có

$$\frac{1}{1 + f(x)} = f\big(1 + f(x)\big) = xf(x+1) = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

Điều này suy ra rằng

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Nhận xét. Nhiều bạn học sinh sau khi đọc lời giải, sẽ tự đặt ra câu hỏi, bắt nguồn từ đâu chúng ta có thể tìm được phép thế "triệt tiêu" như vậy. Quan sát phương trình, chúng ta khá dễ dàng dự đoán được

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Chú ý rằng, để có $f\big(x + f(y)\big) = f(xy + 1)$ ta sẽ xét phương trình

$$x + f(y) = xy + 1$$

Điều này dẫn đến

$$x = \frac{f(y) - 1}{y - 1}.$$

Do chúng ta đã dự đoán được
$$f\left(x\right)=\frac{1}{x},\quad \forall x>0$$
nên ta cần chứng minh $yf(y)=1$. Vậy từ (2.27) ta thấy rằng cần có
$$yf(xy+1)=yf(y),$$
vì thế ta cần xét
$$xy+1=y\Rightarrow x=\frac{y-1}{y}=1-\frac{1}{y}.$$
Một kinh nghiệm khi giải các phương trình có sử dụng phép thế triệt tiêu đó là : "Nếu muốn khử hai vế của phương trình $f\big(\phi\left(x,y\right)\big)$, $f\big(\omega\left(x,y\right)\big)$ ở hai vế của phương trình hàm ta xét phương trình
$$\phi\left(x,y\right)=\omega\left(x,y\right),$$
khi đó ta tìm được $y=\lambda(x)$ rồi thay $y=\lambda(x)$ vào phương trình hàm cần xét.

Ngoài cách giải đã nêu ở trên, chúng ta có thể sử dụng kĩ thuật thế sau để có thể tìm nghiệm hàm của phương trình. Xét $x>1$.
$$P\left(\frac{x-1}{x},f\left(x\right)\right)\Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}+f\left(x\right)\right)=xf\left(x\right),\quad \forall x>1. \tag{2.31}$$
Thực hiện $P\left(x,\dfrac{x-1}{x}+f\left(x\right)\right)$ ta được:
$$f\left(x+f\left(\frac{x-1}{x}+f\left(x\right)\right)\right)=\left[\frac{x-1}{x}+f\left(x\right)\right]f\big(x+xf\left(x\right)\big),\qquad \forall x>1. \tag{2.32}$$
Từ (2.31) và (2.32) suy ra:
$$\frac{x-1}{x}+f\left(x\right)=1\Rightarrow f\left(x\right)=1-\frac{x-1}{x}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{x},\qquad \forall x>1. \tag{2.33}$$
Đến đây làm tương tự như cách 1.

Như đã nói ở phần mở đầu, cũng như một số ví dụ đã nêu, phương pháp thế "bao trùm" lên tất cả các phương pháp khác. Phần lớn khi giải phương trình hàm ta đều cần phải thế biến. Vì thế đây là một phương pháp vô cùng quan trọng. Để kết thúc bài viết, chúng ta sẽ đi đến một ví dụ có sự phối hợp của nhiều phương pháp, nhưng "trung tâm" của cách giải phương trình hàm vẫn là phương pháp thế.

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:
$$f\big(x^2+y+f\left(y\right)\big)=\big[f\left(x\right)\big]^2+ay,\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Lời giải.

Ta thấy rằng nếu $a = 0$ thì có hai hàm số thỏa mãn phương trình (2.34) là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv 1$. Tiếp theo, chúng ta sẽ xét $a \neq 0$. Do vế phải là hàm bậc nhất theo y nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, do đó ta được

$$\left\{ f\left(x^2 + y + f\left(y\right)\right) | y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}.$$

Điều này dẫn đến

$$\left\{ x^2 + y + f\left(y\right) | y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}.$$

Do đó $\left\{ f\left(y\right) | y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}$, hay f là toàn ánh. Vì vậy, tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(b) = 0$. Ta sẽ chứng minh nếu $f(x) = 0$ thì $x = 0$. Từ (2.34) lấy $y = b$ ta được

$$f\left(x^2 + b\right) = \left[f\left(x\right)\right]^2 + ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Từ (2.35) thay x bởi $-x$ ta có

$$f\left(x^2 + b\right) = \left[f\left(-x\right)\right]^2 + ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2.35) ta được

$$\left[f\left(x\right)\right]^2 = \left[f\left(-x\right)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$\left|f\left(x\right)\right| = \left|f\left(-x\right)\right|, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.36}$$

Từ (2.36) suy ra $f(-b) = 0$. Từ (2.34) lấy $y = -b$ ta được:

$$f\left(x^2 - b\right) = \left[f\left(x\right)\right]^2 - ab, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.37}$$

Từ (2.35) và (2.37) ta có

$$f\left(x^2 + b\right) - f\left(x^2 - b\right) = 2ab, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.38}$$

Từ (2.38) lấy $x = 0$ ta được

$$f\left(b\right) - f\left(-b\right) = 2ab$$

Vì $f(b) = f(-b)$ nên $2ab = 0$. Do đó ta phải có $b = 0$. Vậy ta thu được tính chất $f(0) = 0$ và nếu $f(x) = 0$ thì $x = 0$, cũng từ tính chất này ta có: nếu $x \neq 0$ thì $f(x) \neq 0$. Từ (2.34) cho $y = 0$ ta được:

$$f\left(x^2\right) = \left[f\left(x\right)\right]^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.39}$$

Từ (2.39) ta lấy $x = 1$ được

$$f\left(1\right) = f^2\left(1\right) \Rightarrow f\left(1\right) = 1.$$

Trong (2.34) cho $y = 1$ ta được:

$$f\left(x^2 + 2\right) = \left[f\left(x\right)\right]^2 + a = f\left(x^2\right) + a, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.40}$$

Thay $x = 0$ vào (2.40) ta được $a = f(2)$. Do vậy

$$a^2 = f^2(2) = f\left(2^2\right) = f(4) = f\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\right) = f(2) + a = 2a.$$

Do đó, ta phải có $a = 2$. Khi đó (2.34) trở thành

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = \left[f(x)\right]^2 + 2y, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.41}$$

Từ (2.41) lấy $y = -\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{2}$ ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{\left[f(x)\right]^2}{2} + f\left(-\frac{\left[f(x)\right]^2}{2}\right)\right) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy

$$x^2 - \frac{\left[f(x)\right]^2}{2} + f\left(-\frac{\left[f(x)\right]^2}{2}\right) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f\left(-\frac{\left[f(x)\right]^2}{2}\right) = -x^2 + \frac{\left[f(x)\right]^2}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Từ (2.41) thay y bởi $-\frac{\left[f(y)\right]^2}{2}$ ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{\left[f(y)\right]^2}{2} + f\left(-\frac{\left[f(y)\right]^2}{2}\right)\right) = \left[f(x)\right]^2 - \left[f(y)\right]^2,\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

Từ (2.43) sử dụng (2.42) ta có

$$f\left(x^2 - \frac{\left[f(y)\right]^2}{2} - y^2 + f\left(-\frac{\left[f(y)\right]^2}{2}\right)\right) = \left[f(x)\right]^2 - \left[f(y)\right]^2,\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta được

$$f\left(x^2 - y^2\right) = f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right),\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.44}$$

Từ (2.44) lấy $x = 0$ ta được

$$f\left(-y^2\right) = -f\left(y^2\right),\ \forall y \in \mathbb{R},$$

Từ đây, ta suy ra
$$f\left(t\right)=-f\left(-t\right),\,\forall t\geq 0. \tag{2.45}$$
Với $t<0$ thì $-t>0$, sử dụng (2.45) ta thu được $f(-t)=-f(t)$. Kết hợp với (2.45) ta có
$$f(-t)=-f(t),\quad \forall t\in\mathbb{R},$$
hay f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (2.44) ta được:
$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \text{với}\quad x\geq 0,y\leq 0 \tag{2.46}$$
Từ (2.46) cũng có:
$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \text{với}\quad x\leq 0,y\geq 0. \tag{2.47}$$
Nếu $x>0$ và $y>0$ thì
$$f\left(x+y\right)=f\left(x-\left(-y\right)\right)=f\left(x\right)-f\left(-y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right). \tag{2.48}$$
Nếu $x<0$ và $y<0$ thì theo (2.48) ta có $f(-x-y)=f(-x)+f(-y)$, suy ra
$$-f\left(x+y\right)=-f\left(x\right)-f\left(y\right)\Rightarrow f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)\ \text{với}\ x<0,y<0. \tag{2.49}$$
Từ (2.46), (2.47), (2.48), (2.49) ta được
$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\,\forall x,\,y\in\mathbb{R}. \tag{2.50}$$
Sử dụng (2.39) và (2.50) ta có kết quả sau
$$\left[f\left(x+y\right)\right]^2=f\left(\left(x+y\right)^2\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2.51}$$
Chú ý rằng
$$\begin{aligned}\left[f\left(x+y\right)\right]^2&=\left[f\left(x\right)+f\left(y\right)\right]^2\\&=f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)f\left(y\right)+f^2\left(y\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.52}$$
và
$$\begin{aligned}f\left(\left(x+y\right)^2\right)&=f\left(x^2+2xy+y^2\right)\\&=f\left(x^2\right)+f\left(2xy\right)+f\left(y^2\right)\\&=f^2\left(x\right)+2f\left(xy\right)+f^2\left(y\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.53}$$
Từ (2.51), (2.52) và (2.53), ta có
$$f(xy)=f(x)f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$
Vì $f\left(-y^2\right)=-f\left(y^2\right),\,\forall y\in\mathbb{R}$, nên
$$f\left(x\right)\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}^+.$$

Từ đó, với $x > y \geq 0$, ta được

$$f(x) - f(y) = f(x - y) > 0, \quad \forall x > y \geq 0.$$

Do f là một hàm lẻ nên điều này chứng tỏ rằng, f là một hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Từ tính cộng tính của hàm số f, ta được

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với tính chất nhân tính của hàm số f, ta thấy rằng

$$a = 0 \quad \text{hoặc} \quad a = 1.$$

Vì $f(1) = 1$ nên ta có

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Chúng ta thấy rằng về mặt ý tưởng xây dựng, kết cấu cũng như hình thức, thì bài toán số 6 và bài toán số 3 có nhiều nét tương đồng. Đây là một bài toán hay và khó, để giải quyết được bài toán này, học sinh phải nắm vững các tính chất cơ bản của hàm số, kết hợp với kinh nghiệm khi sử dụng các phép thế giải quyết các bài toán về phương trình hàm. Ở chứng minh phần cuối của bài toán, chúng ta sử dụng kết quả tương đối "kinh điển" sau:

"Nếu hàm số $f(x)$ là cộng tính và đơn điệu trên tập xác định của nó thì khi đó

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}\text{''}.$$

Cách chứng minh kết quả này hoàn toàn tương tự với các bước làm để tìm nghiệm của phương trình hàm Cauchy vì thế chúng tôi không đưa ra cách chứng minh ở đây và nó là như là một bài tập dành cho bạn đọc.

Bài toán số 6 thực ra là kết quả tổng quát của bài toán dưới đây, được đăng trong phần đề ra kì này của tạp chí "The American Mathematical Monthly" năm 2001

"Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = \left[f(x)\right]^2 + 2y,$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài toán 7. (Slovenia National Olympiad 2010). *Tìm tất cả các hàm* $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *thỏa mãn*

$$(y+1)f(x+y)=f(xf(y)),\qquad \forall x,y\in[0,+\infty).$$

Bài toán 8. (Switzerland Finad Round 2010). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(f(x))+f(f(y))=2y+f(x-y),\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 9. (Romania Team Selection Test 2011). *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$2f\left(x\right)=f\left(x+y\right)+f\left(x+2y\right),\qquad \forall x\in\mathbb{R},\qquad \forall y\geq 0.$$

Bài toán 10. (Olympic toán Canada - 2000) *Tìm tất cả các hàm số:* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left((x-y)^2\right)=x^2-2yf\left(x\right)+\left(f\left(y\right)\right)^2,\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 11. (Poland Second Round - 2012). *Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn*

$$g(f(x))=f(g(y))+x,\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 12. (Albania Team Selection Test 2013). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(x^3)+f(y^3)=(x+y)[f(x^2)+f(y^2)-f(xy)],\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 13. (IMO 2010). *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f([x]y)=f(x)[f(y)],\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Ở đây $[a]$ *được ký hiệu là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng* a.

Bài toán 14. (Turkey National Olympiad First Round 2012) *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(x)f(y)f(z)=12f(xyz)-16xyz,\qquad \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 15. (Estonian 2003 - 2004) *Tìm tất cả các hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn:*

$$f(x)f(y)=f(xy)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \forall x,y\in(0;+\infty).$$

Bài toán 16. (Japan Mathematical Olympiad Finals - 2012) *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f\left(f\left(x+y\right)f\left(x-y\right)\right)=x^2-f\left(y\right),\ \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 17. (Macedonia MO - 2011) *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f\left(x+yf\left(x\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+xf\left(y\right),\ \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

Tài liệu

[1] NGUYỄN TÀI CHUNG, *Chuyên khảo Phương trình Hàm,* Nhà xuất Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2014.

[2] TRẦN NAM DŨNG, LÊ PHÚC LỮ, PHAN MINH ĐỨC, *Lời giải và Bình luận đề thi Học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 năm 2013*, Diễn đàn toán học Mathscope.org.

[3] TRẦN NAM DŨNG, VÕ QUỐC BÁ CẨN, LÊ PHÚC LỮ, HOÀNG ĐỖ KIÊN, NGUYỄN HUY TÙNG, *Lời giải và Bình luận đề thi Chọn học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2014*, Diễn đàn toán học Mathscope.org.

[4] TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, số 341, tháng 11 năm 2005.