Bài giảng số 06:

" PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN LỚP HÀM ĐƠN ĐIỆU "

A. LÝ THUYẾT.

1. **Định nghĩa về hàm đơn điệu**: Cho D là $(a;b),[a;b],[a;b),(a;+\infty),...,\mathbb{R}$ và $f(x)$ là hàm số xác định trên D. Khi đó:

- ($f(x)$ đồng biến trên D) $\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \forall x, y \in D \\ x < y \end{cases} \Rightarrow f(x) < f(y) \right)$
- ($f(x)$ nghịch biến trên D) $\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \forall x, y \in D \\ x < y \end{cases} \Rightarrow f(x) > f(y) \right)$
- Đơn điệu là tên gọi chung của hàm đồng biến hoặc hàm nghịch biến.

2. **Tính chất của hàm đơn điệu:** Cho $f(x)$ đơn điệu

- $\Rightarrow f(x)$ là đơn ánh.
- $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$
- $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{R}^+$) và $f(x)$ đơn điệu thì $f(x) = kx$

3. **Phương pháp giải:**

- Phương pháp 1. Biến đổi phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ do tính đơn điệu hoặc đơn ánh của hàm số nên $u = v$ là phương trình đơn giản hơn.
- Phương pháp 2. Chỉ ra $f(x)$ cộng tính trên $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{R}^+$ do tính đơn điệu nên $f(x) = kx$

B. BÀI TẬP

Những bài toán sử dụng phương pháp 1.

☒ Bài 1. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện
$f\left((1+x)f(y)\right) = y.f\left(f(x)+1\right), \forall x, y \in \mathbb{R} (1)$

Hướng dẫn:

- Cho $y = 1$ ta được $f\left((1+x)f(1)\right) = f\left(f(x)+1\right), \forall x \in \mathbb{R} (2)$
- Do f đơn điệu nên từ (2) ta có $(1+x)f(1) = f(x)+1, \forall x \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$
- Thay lại điều kiện (1) ta được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$
- $\Rightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Thử lại thấy thoả mãn:
- KL: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

⌧ Bài 2. Tìm tất cả các hàm số tăng $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện
$f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x+y\right)+1,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1).

Lời giải:

- Ở (1) thay $y=0$ ta được $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+1,\forall x\in\mathbb{R}$
- Ở (1) thay $x=f\left(x\right)$ ta được
  $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)+y\right)=f\left(f\left(x\right)+y\right)+1=f\left(x+y\right)+2,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)
- Ở (1) lại thay $y=f\left(y\right)$ ta được
  $f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(x+f\left(y\right)\right)+1=f\left(x+y\right)+2,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)
- Từ $(2),(3)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)+y\right)+1=f\left(x+f\left(y\right)\right)+1,\forall x,y\in\mathbb{R}$
  Hay $f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x+f\left(y\right)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (4)
- Do $f\left(x\right)$ tăng trên $\mathbb{R}$ nên từ
  $(4)\Rightarrow f\left(x\right)+y=f\left(y\right)+x\Leftrightarrow f\left(x\right)-x=f\left(y\right)-y,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (5)
- Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x,\forall x\in\mathbb{R}$
  $\Rightarrow g\left(x\right)=C,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$
- Thay vào (1) ta có C là nghiệm của phương trình
  $f\left(x+y+C\right)=x+y+C+1\Leftrightarrow x+y+C+C=x+y+C+1\Leftrightarrow C=1$
  $\Rightarrow f\left(x\right)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$
- Thử lại thấy thoả mãn $\Rightarrow f\left(x\right)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$

Nhận xét:
Cách 2. Do vế phải đối xứng nên
$f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(f\left(y\right)+x\right)\Rightarrow f\left(x\right)+y=f\left(y\right)+x\Rightarrow f\left(x\right)=x+C$.
Cách 3. Cho $x=y=0$ suy ra $f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)+1$
Thay y bởi $-x$ ta có $f\left(f\left(x\right)-x\right)=f\left(0\right)+1$
Suy ra $f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(f\left(x\right)-x\right)$ suy ra $f\left(x\right)=x+1$.

⌧ Bài 3. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện
$f\left(x+f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)+y,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1).

Lời giải:

- Ở (1) thay $x=0\,\&\,y=x$ ta được $f\left(f\left(x\right)\right)=x+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (2)
- Ở (1) thay $x=f\left(x\right)$ và sử dụng (2) ta được
  $f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+y=x+y+f\left(0\right)=f\left(f\left(x+y\right)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

- Do $f(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ nên từ $(3) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}, k$ là hằng số
- Thay vào (1) ta có k là nghiệm của phương trình $(k^2-1)y = 0, \forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-1 \end{array}\right.$
- Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Thử lại thấy hai hàm số trên thoả mãn
  $\Rightarrow$KL: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét:
Có được $f(0) = 0$ và $f(f(x)) = x$. Ở (1) thay x bởi $f(x)$ ta có $f(x+y) = f(x) + f(y)$ suy ra f cộng tính.

✉ Bài 4. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(x+f(y)) = \dfrac{y}{xy+1}, \forall x, y \in (0;+\infty)$ (1).

Lời giải:

- Từ $(1) \Rightarrow x + f(y) > 0, \forall x, y \in (0;+\infty) \Rightarrow f(x) \geq 0$
- Ở (1) thay $x = \dfrac{y-1}{y}, \forall y > 1$ ta được $f\left(\dfrac{y-1}{y} + f(y)\right) = 1, \forall y \in (1;+\infty)$ (2)

  Mặt khác ở (2) thay $y = x$ ta được $f\left(\dfrac{x-1}{x} + f(x)\right) = 1, \forall x \in (1;+\infty)$ (3)

  Từ (2) (3) và tính đơn điệu của $f \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{y} + f(y) = 1 - \dfrac{1}{x} + f(x), \forall x, y \in (1;+\infty)$

  $\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{x} + f(x) = C \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} + k, \forall x \in (1;+\infty), k$ là hằng số không âm.
- Thay vào $(1) \Rightarrow k$ là nghiệm của phương trình

  $\dfrac{1}{x+f(y)} + k = \dfrac{y}{xy+1}, \forall x, y \in (1;+\infty)$

  $\Leftrightarrow \dfrac{y}{xy+1+ky} = \dfrac{y}{xy+1}, \forall x, y \in (1;+\infty)$

  $\Leftrightarrow k = 0$

  $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in (1;+\infty)$
- Xét với $\begin{cases} \forall x > 0 \\ \forall y > 1 \end{cases}$ khi đó (1) được viết lại thành $f\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{y}{xy+1}, \forall x > 0, \forall y > 1$ (4)

  Hay $f\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y}}, \forall x > 0, \forall y > 1$. Khi lấy y lớn tùy ý thì $\dfrac{1}{y}$ nhận giá trị dương và đủ gần 0. Nên $x + \dfrac{1}{y}$ với $\forall x > 0, \forall y > 1$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$. Nên $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$

- Thử lại thấy thoả mãn

  KL: $\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x},\forall x\in(0;+\infty)$

Cách khác:

Từ (1) suy ra $f\left(x+f(y)\right)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y}},\forall x,y>0$

Thay x,y lần lượt bởi $\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{x}$ ta có $f\left(\dfrac{1}{y}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+x}=f\left(x+f(y)\right)$

Do đơn ánh suy ra $f(y)=\dfrac{1}{y}+c$ thử lại suy ra $c=0$ suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

> ☒ Bài 5. Tìm tất cả các hàm số tăng $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện
> $f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)},\forall x\in(0;+\infty)$ (1).

Hướng dẫn:

- Từ $(1)\Rightarrow f(x)+\dfrac{1}{x}>0,\forall x>0$
- Ở (1) thay $x=f(x)+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=f\left[f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)+\dfrac{1}{x}}\right]$

  Do f tăng nên $x=f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)+\dfrac{1}{x}},\forall x>0$

  $$\Rightarrow x^2f^2(x)-xf(x)-1=0,\forall x>0\Rightarrow f(x)=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x}\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}\end{array}\right.$$

  Suy ra $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x},\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2x},\forall x\in\mathbb{R}^+$ hoặc $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x}, & \forall x\in D\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}, & \forall x\in\mathbb{R}^+\setminus D\end{cases}$

  Nếu $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x},\forall x\in\mathbb{R}^+$ loại vì f tăng.

Xét hàm $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x}, \forall x\in D\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}, \forall x\in\mathbb{R}^+\setminus D\end{cases}$ nếu D có nhiều hơn hai phân tử là $x_1<x_2$ từ hàm

$f(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x}$ với $x\in D$ suy ra $f(x_1)>f(x_2)$ điều này lại mâu thuẫn với $f(x)$ tăng. Do đó D chỉ có thể chứa một phần từ là x_0 suy ra $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x_0}+\dfrac{1}{x_0}\right)=\dfrac{2x_0}{1+\sqrt{5}}$. Nếu

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x_0}+\dfrac{1}{x_0}=x_0\Rightarrow x_0=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ suy ra $f(x)=\begin{cases}1, \forall x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}, \forall x\in\mathbb{R}^+\setminus\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

Đối với hàm này ta cho $x=10>\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ nhưng dễ thấy $f(10)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{20}<f\left(\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$

điều này lại mâu thuẫn với hàm tăng. Còn nếu $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x_0}+\dfrac{1}{x_0}\neq x_0$ suy ra

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x_0}+\dfrac{1}{x_0}\right)}=\dfrac{2x_0}{1+\sqrt{5}}\Rightarrow -4=4x_0\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2x_0}+\dfrac{1}{x_0}\right)$ vô lý. Vậy D không có phần tử nào,

suy ra chỉ có hàm $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}, \forall x\in\mathbb{R}^+$ thấy thỏa mãn mọi điều kiện của bài toán.

………………………………………………………………………………..

Những bài toán sử dụng phương pháp 2:

☒ Bài 6. [Olimpic, trang 116]
Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f\left(x^2+f(y)\right)=y+f^2(x), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

<u>Hướng dẫn:</u>

- Chỉ ra $f(0)=0$. Thật vậy

  Cho $x=0$ ta có $f\left(f(x)\right)=f^2(x), \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

  f là toàn ánh nên $\exists a\in\mathbb{R}: f(a)=0$

  Thay $x=y=a$ ta có $f(a^2)=a+f^2(a)=a$

  Suy ra $f\left(f(a^2)\right)=f(a)\Rightarrow f^2(a^2)=0\Rightarrow f(a^2)=0\Rightarrow a=0$

- Chỉ ra $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x\geq 0, y\in\mathbb{R}$. Thật vậy.

  Ta có $\forall x\geq 0, \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x+y)=f\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+f\left(f(y)\right)\right)=f(y)+f^2\left(\sqrt{x}\right)=f(y)+f(x)$

- Xét trên khoảng $\mathbb{R}^+$ ta có $\forall x > y > 0$ ta có $f(x) = f(x-y+y) = f(x-y) + f(y)$

  Từ (1) cho $y = 0$ ta có $f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  suy ra $f(x) > 0, \forall x > 0$ suy ra $f(x) > f(y), \forall x > y > 0$

  Vậy f là số tăng trên $\mathbb{R}^+$ mà f cộng tính suy ra $f(x) = kx \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = x, \forall x > 0$.
- Với $x < 0$ ta có $f^2(x) = f(x^2) = x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = -x \end{array}\right.$

  Giả sử $\exists a < 0 : f(a) = -a$ suy ra $f(a^2 - a) = a + a^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - a = a + a^2 \\ a - a^2 = a + a^2 \end{array}\right. \Rightarrow a = 0$ mâu thuẫn.

  Vậy $f(x) = x, \forall x < 0$

  Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Cách khác:</u>

Chỉ ra được $f(0) = 0$ và f song ánh

Ta có $f(f(x)) = x \, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $f(x^2) = f^2(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \ge 0, \forall x \ge 0$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Chỉ ra được $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \ge 0, y \in \mathbb{R}$

Thay x bởi $-x$ ta có $f^2(x) = f^2(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$ hoặc $f(x) = -f(-x)$ nếu $f(x) = f(-x)$ mà f đơn ánh suy ra $x = 0$ suy ra $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $x < 0, y \in \mathbb{R}$ ta có $f(x+y) = f(-(-x-y)) = -f(-x-y) = f(x) + f(y)$

Suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Xét $x > y$ suy ra $f(x) = f(x-y+y) = f(x-y) + f(y) > f(y)$ suy ra f tăng.

Vậy f cộng tính và tăng suy ra $f(x) = kx$, thử lại ta được $k = 1$, suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 7. (Hy lạp 1997) Giả sử $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn ba điều kiện:

a) f tăng nghiêm ngặt

b) $f(x) > -\dfrac{1}{x}, \forall x > 0$

c) $f(x) f\left(f(x) + \dfrac{1}{x}\right) = 1, \forall x > 0$

Tính $f(1)$

Hướng dẫn: Tương tự bài 5.

Bài 8. Tìm tất cả các hàm số $f : [1; +\infty) \to [1; +\infty)$ thỏa mãn $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \ge 1$.

Giải:

Ta chứng minh được f là song ánh.

Ta chứng minh f đồng biến. Thật vậy : Vì f đơn ánh nên chỉ có duy nhất một giá trị là 1 để $f(1)=1$, nếu $y>1$ suy ra $f(y)>1$. Xét $x>y\geq 1$ ta có

$f(x)=f\left(\frac{x}{y}.y\right)=f\left(\frac{x}{y}.f(f(y))\right)=f\left(\frac{x}{y}\right).f(y)>f(y)$ suy ra f đồng biến.

Cho $x=y=1$ suy ra $f(f(1))=f(1)\Rightarrow f(1)=1$

Thay $x=1$ suy ra $f(f(y))=y,\forall y\geq 1$.

Nếu $f(x)>x$ suy ra $f(f(x))>f(x)$ suy ra $x>f(x)$ vô lý.

Nếu $f(x)<x$ suy ra $f(f(x))<f(x)$ suy ra $x<f(x)$ vô lý.

Vậy $f(x)=x,\forall x\in[1;+\infty)$

Bài 9. (Irac 1997) Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm giảm thỏa mãn $f(x+y)+f(f(x)+f(y))=f\left[f(x+f(y))+f(y+f(x))\right],\forall x,y\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(f(x))=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 10. (Italy 2000)

Tìm tất cả các hàm đơn điêu ngặt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+f(y))=f(x)+y,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Bài 11. [chọn HSG tỉnh Phú Thọ, năm 2014-2015]

Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện sau:

$f(x+y)=x^{2014}f\left(\frac{1}{x^{2013}}\right)+y^{2014}f\left(\frac{1}{y^{2013}}\right)$ với mọi $x,y>0$

Giải:

Viết lại phương trình đã cho như sau

$$f(x+y)=x^{2014}f\left(\frac{1}{x^{2013}}\right)+y^{2014}f\left(\frac{1}{y^{2013}}\right),\forall x,y>0\ \ (1)$$

Cho $x=y$ từ (1) ta có $f(2x)=2x^{2014}f\left(\frac{1}{x^{2013}}\right)$. Lại cho $x=1$ thì $f(2)=2f(1)$

Do đó phương trình (1) trở thành

$$f(x+y)=\frac{f(2x)+f(2y)}{2},\forall x,y>0\ (2)$$

Từ (2) suy ra với $\forall x,y,z>0$ thì

$$f(x+y+z)=\frac{f(2(x+y))+f(2z)}{2}=\frac{\frac{f(4x)+f(4y)}{2}+f(2z)}{2}$$

$$=\frac{f(4x)+f(4y)+2f(2z)}{4}\ (3)$$

Tương tự, với $\forall x, y, z > 0$ thì

$$f\left(x+y+z\right)=\frac{f\left(2\left(x+z\right)\right)+f\left(2y\right)}{2}=\frac{\frac{f\left(4x\right)+f\left(4z\right)}{2}+f\left(2y\right)}{2}$$

$$=\frac{f\left(4x\right)+f\left(4z\right)+2f\left(2y\right)}{4}\ \left(4\right)$$

So sánh $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ ta được

$f\left(4x\right)+f\left(4y\right)+2f\left(2z\right)=f\left(4x\right)+f\left(4z\right)+2f\left(2y\right)$

$\Rightarrow f\left(4y\right)-2f\left(2y\right)=f\left(4z\right)-2f\left(2z\right)$

$\Rightarrow f\left(2y\right)-2f\left(y\right)=f\left(2z\right)-2f\left(z\right),\forall y,z>0$

$\Rightarrow f\left(2y\right)-2f\left(y\right)=f\left(2\right)-2f\left(1\right)=0\Rightarrow f\left(2y\right)=2f\left(y\right),\forall y>0$

Khi đó $\left(2\right)$ suy ra $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y>0$

Như vậy bài toán đã cho trở thành: Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f:\left(0;+\infty\right)\to\mathbb{R}$ thoả mãn $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y>0$. Theo lý thuyết phương trình Cauchy thì $f\left(x\right)=ax,\forall x>0,a\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số $f\left(x\right)=ax,\forall x>0,a\in\mathbb{R}$ thoả mãn phương trình hàm đã cho. Vậy $f\left(x\right)=ax,\forall x>0,a\in\mathbb{R}$.