

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÀO CAI  
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI

NGUYỄN QUANG TÂN

# ĐỀM BẰNG HAI CÁCH

Lào Cai, tháng 5 năm 2018

*Không có gì hủy hoại những khả năng toán học bằng thói quen tiếp nhận những phương pháp giải sẵn có mà không hề tự hỏi vì sao cần giải đúng như thế và làm thế nào để tự nghĩ ra điều đó.*

W.W.Sawyer

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Phần mở đầu</b>	<b>2</b>
1.1	Lý do chọn đề tài . . . . .	2
1.2	Mục đích của chuyên đề . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Phần nội dung</b>	<b>3</b>
2.1	Cơ sở lý thuyết . . . . .	3
2.1.1	Nguyên tắc Fubini . . . . .	3
2.1.2	Bất đẳng thức tổ hợp . . . . .	4
2.2	Bài tập minh họa . . . . .	4
2.2.1	Bài tập đếm số cặp . . . . .	4
2.2.2	Bài tập đếm số bộ ba . . . . .	6
2.2.3	Ma trận liên thuộc . . . . .	17
2.2.4	Lựa chọn giữa đếm bằng hai cách và nguyên lý Drichlet	18
2.3	Bài tập tự luyện . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Phần kết luận</b>	<b>20</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>22</b>

# 1 Phần mở đầu

## 1.1 Lý do chọn đề tài

Có nhiều công cụ để giải quyết các bài toán tổ hợp như sử dụng nguyên lý Drichlet, nguyên lý bao hàm loại trừ, xây dựng công thức truy hồi, phương pháp hàm sinh và đếm bằng hai cách,... Trong các công cụ đó thì những bài toán sử dụng tư duy đếm bằng 2 cách là những bài toán hay giúp rèn luyện và kiểm tra được khả năng tư duy của học sinh. Vì nó là những bài toán có tính trừu tượng và phải biết cách khai thác những giả thiết của bài toán mà nhiều khi ta khó nhìn ra được mối liên hệ giữa giả thiết hoặc giữa giả thiết và kết luận. Hơn nữa trong nhiều bài toán ta cần sử dụng bất thức tổ hợp để đánh giá.

Thực tế vì những lý do trên mà các bài toán sử dụng công cụ này xuất hiện nhiều trong các kì thi như IMO, China MO, Russia MO và cả trong kì thi VMO nữa mà chúng tôi sẽ trích dẫn để giải minh họa trong chuyên đề này.

Tuy nhiên chưa có nhiều tài liệu viết về vấn đề này. Vì vậy đúc rút từ kinh nghiệm giảng dạy và tài liệu tham khảo chúng tôi thực viết chuyên đề: "Đếm bằng 2 cách" để phục vụ cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp.

## 1.2 Mục đích của chuyên đề

Chuyên đề "Đếm bằng 2 cách" này nhằm cung cấp rõ ràng cơ sở lý thuyết và một hệ thống bài tập từ dễ đến khó đều được giải bằng phương pháp đã nêu nhằm giúp học sinh nắm vững kiến thức và rèn luyện tư duy giải toán cho các kì thi học sinh giỏi các cấp.

Trong chuyên đề này chúng tôi có tham khảo một số tài liệu được liệt kê và đánh số thứ tự ở phần cuối. Có nhiều cách trình bày lời giải bài toán đếm bằng 2 cách như cách dùng nguyên lý Fubini trong tài liệu [1] hoặc dùng *Ma trận liên thuộc* như trong tài liệu [2]. Trong chuyên đề này chúng tôi sử dụng cách đếm các cặp  $(A, B)$  hoặc bộ  $(A, B, C)$  một cách tự nhiên theo hai cách khác nhau (bản chất cũng chính là nguyên lý Fubini) nhưng trong một số bài tập để lời giải trở nên rõ ràng chúng tôi cũng sử dụng cách trình bày bằng *ma trận liên thuộc* (*Incidence Matrices*).

## 2 Phần nội dung

### 2.1 Cơ sở lý thuyết

Đầu tiên ta tìm hiểu nguyên lý Fubini được trình bày trong tài liệu [1]

#### 2.1.1 Nguyên tắc Fubini

Ta định nghĩa  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Cho  $S \subset A \times B$  ta kí hiệu:

- Tập các phần tử của  $S$  có thành phần đầu là  $a$  được kí hiệu là

$$S(a, *) = \{(a, b) | (a, b) \in S\}.$$

- Tập các phần tử của  $S$  có thành phần thứ hai là  $b$  được kí hiệu là

$$S(*, b) = \{(a, b) | (a, b) \in S\}.$$

Khi đó ta có nguyên lý Fubini như sau:

**Định lý 2.1 (Nguyên lý Fubini).** Cho  $A, B$  là các tập hữu hạn và  $S \subset A \times B$ . Khi đó

$$|S| = \sum_{a \in A} |S(a, *)| = \sum_{b \in B} |S(*, b)|.$$

Nguyên lý trên thực tế là số cách đếm tập  $S$  theo 2 cách khác nhau.

Bên cạnh cách trình bày theo nguyên lý Fubini thì ta có thể trình bày về đếm bằng hai cách theo cách sử dụng **Ma trận liên thuộc** trong tài liệu [2].

Giả sử  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  và  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ .

Xét ma trận  $C = (c_{ij})$  với  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ .

$$\text{Với } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in S \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin S \end{cases}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Gọi  $R_i$  là tổng của dòng thứ  $i$  với  $1 \leq i \leq m$  và  $C_j$  là tổng của cột thứ  $j$  với  $1 \leq j \leq n$ . Thì ta có đẳng thức:

$$|S| = \sum_{i=1}^m R_i = \sum_{j=1}^n C_j.$$

### 2.1.2 Bất đẳng thức tổ hợp

Cho số các số nguyên dương  $a_1, \dots, a_n$  thỏa mãn  $a_1 + \dots + a_n = s$ . Trong nhiều bài toán tổ hợp ta cần đánh giá biểu thức

$$C_{a_1}^2 + \dots + C_{a_n}^2$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$  là một hàm lồi. Và  $C_{a_i}^2 = f(a_i)$ .

- Trường hợp 1: Nếu  $s$  chia hết cho  $n$ , áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

$$C_{a_1}^2 + \dots + C_{a_n}^2 \geq nf\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{s(s-n)}{2n}$$

- Trường hợp 2: Giả sử  $s$  không chia hết cho  $n$  và ta có  $s = n\lfloor \frac{s}{n} \rfloor + r$  với  $0 \leq r < n$ . Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có:

$$C_{a_1}^2 + \dots + C_{a_n}^2 \geq rf\left(\lfloor \frac{s}{n} \rfloor + 1\right) + (n-r)f\left(\lfloor \frac{s}{n} \rfloor\right)$$

## 2.2 Bài tập minh họa

### 2.2.1 Bài tập đếm số cặp

**Bài tập 1.** Trong một ủy ban, mỗi thành viên thuộc đúng 3 tiểu ban, mỗi tiểu ban có đúng 3 thành viên. Chứng minh rằng số thành viên của ủy ban bằng số tiểu ban.

*Lời giải.* Gọi số thành viên là  $n$  và số tiểu ban là  $m$ .

Gọi  $T$  là số cặp  $(a, B)$  trong đó thành viên  $a$  thuộc tiểu  $B$ . Vì mỗi thành viên thuộc 3 tiểu ban nên:  $T = 3n$ ;

Vì mỗi tiểu ban có đúng 3 thành viên nên  $T = 3m$ ;

Vậy  $3m = 3n$  nên  $m = n$ .

*Nhận xét 2.2.* Đây là bài toán cơ bản nhất về đếm bằng 2 cách, ở đây là ta đếm cặp  $(a, B)$  bằng hai cách. Từ đó ta dễ dàng giải được bài toán sau.

**Bài tập 2.** Trong trường hợp có một số câu lạc bộ. Biết rằng mỗi câu lạc bộ có đúng 30 học sinh. Và mỗi học sinh tham gia đúng 3 câu lạc bộ. Biết rằng tổng số câu lạc bộ và số học sinh bằng 440. Tìm số học sinh của trường.

*Lời giải.* Ta đếm số cặp  $(a, B)$  mà học sinh  $a$  thuộc câu lạc bộ  $B$ .

Gọi  $m$  là số câu lạc bộ và  $n$  là số thí sinh.

Ta có hệ  $30m = 3n$  và  $m + n = 440$ . Ta được  $m = 40$  và  $n = 400$ .

**Bài tập 3 (IMC 2002).** Có 200 thí sinh tham gia một cuộc thi toán học. Các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết mỗi bài được giải đúng bởi ít nhất 120 thí sinh. Chứng minh rằng có hai thí sinh mà mỗi bài tập được giải bởi ít nhất một trong hai thí sinh.

*Lời giải.* Ta dùng phản chứng: Với mỗi cặp thí sinh bất kì đều có ít nhất 1 bài không giải được bởi cả hai thí sinh.

Gọi  $T$  là số bộ  $(\{t_1, t_2\}; B)$  thỏa mãn thí sinh  $t_1, t_2$  cùng không giải được bài tập  $B$ .

Ta biết rằng mỗi bài được giải bởi ít nhất 120 thí sinh, vậy số thí sinh không giải được một bài nhỏ hơn hoặc bằng 80.

Nên  $T \leq 6C_{80}^2 = 18960$ .

Mặt khác hai thí sinh bất kì có ít nhất một bài cùng không giải được nên  $T \geq C_{200}^2 = 19900$ . Mâu thuẫn.

Vậy điều phản chứng là sai. Bài toán được chứng minh.

*Nhận xét 2.3.* Trong lời giải trên đề bài chỉ cho ta có một giả thiết "mỗi bài được giải bởi ít nhất 120 thí sinh", để đếm bằng hai cách ta cần 2 giả thiết. Khi ta phản chứng thì xuất hiện giả thiết "hai thí sinh không cùng làm được một bài" khi đó có đủ 2 giả thiết và đồng thời xuất hiện ý tưởng đếm số bộ  $(\{t_1, t_2\}; B)$  bằng hai cách.

**Bài tập 4 (Chọn đội tuyển thi Quốc Gia Khối chuyên ĐHSPT 2013).** Cơ sở dữ liệu tạp chí của thư viện Quốc Gia có đúng 2016 loại khác nhau. Thư viện này cho phép 2013 thư viện địa phương kết nối để có thể khai thác cơ sở dữ liệu tạp chí của nó. Biết mỗi thư viện địa phương được phép khai thác ít nhất 1008 loại tạp chí khác nhau và 2 thư viện địa phương bất kì có tối đa 504 loại tạp chí mà cả 2 thư viện địa phương đó cùng đc phép khai thác. Chứng minh rằng không có quá 1 loại tạp chí trong cơ sở dữ liệu của thư viện Quốc Gia mà cả 2013 thư viện địa phương đều không thể khai thác được.

*Lời giải.* Giả sử có 2 tạp chí mà không thư viện địa phương nào cùng khai thác. Như vậy tập hợp các tạp chí mà các thư viện cùng khai thác là  $X = \{1, \dots, 2014\}$ . Gọi  $T$  là số bộ  $(\{T_1, T_2\}, t)$  mà hai thư viện  $T_1, T_2$  cùng khai thác tạp chí  $t$ .

Vì mỗi thư viện khai thác chung tối đa 504 tạp chí nên:  $T \leq 504C_{2013}^2$ .

Giả sử số thư viện cùng khai thác tạp chí thứ  $i$  là  $a_i$  thì  $\sum_{i=1}^{2013} a_i \geq 2013 \cdot 1008$ .

Ta có:  $T = \sum_{i=1}^{2014} C_{a_i}^2 \geq \frac{2003 \cdot 1008(2003 \cdot 1008 - 2014)}{2 \cdot 2014}$ .

Suy ra:  $504C_{2013}^2 \geq \frac{2003 \cdot 1008(2003 \cdot 1008 - 2014)}{2 \cdot 2014}$ . Điều này vô lý.

**Bài tập 5 (Chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Đồng Tháp năm học 2013).** CLB du khảo có  $n$  thành viên. Năm ngoái CLB đã tổ chức được 6 chuyến du khảo, mỗi chuyến có 5 thành viên tham dự. Một thành viên CLB nhận xét rằng hai chuyến du khảo bất kỳ có không quá hai thành viên chung. Hỏi CLB đó có ít nhất bao nhiêu thành viên?

*Lời giải.* Giả sử câu lạc bộ đó có  $n$  thành viên. Tập hợp các học sinh tham gia chuyến du khảo thứ  $i$  là  $A_i$ . Ta có:

i)  $|A_i| = 5;$

ii)  $|A_i \cap A_j| \leq 2;$

Giả sử thành viên thứ  $i$  tham gia  $a_i$  chuyến du khảo ta có  $\sum_{i=1}^6 a_i = 30$ .

Gọi  $T$  là số bộ  $(A_i, A_j, k)$  trong đó thành viên  $k$  tham gia cả hai chuyến du khảo  $A_i$  và  $A_j$ .

$$T = \sum_{i=1}^n C_{a_i}^2 \geq \frac{15(30-n)}{n}$$

Vì hai chuyến du khảo bất kỳ có không quá 2 thành viên chung nên:

$$T \leq 2C_6^2 = 30.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{15(30-n)}{n} \leq 30 \Leftrightarrow n \geq 10.$$

### 2.2.2 Bài tập đếm số bộ ba

**Bài tập 6.** Trong một trường học có  $m$  lớp với  $m \geq 10$ , tổng số học sinh là  $n$ . Với  $n \leq 465$ , các lớp được đánh số từ 1 tới  $m$ , biết rằng mỗi học sinh ở lớp  $i$  quen  $j$  học sinh ở lớp thứ  $j$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $n$ .

*Lời giải.* Giả sử lớp thứ  $i$  có  $k_i$  học sinh. Từ quan hệ quen biết ta có:  $k_i \cdot j = k_j \cdot i$  nên  $\frac{k_i}{i} = t$  với mọi  $i$ .

Vì  $k_1 + \dots + k_m = n \leq 465$  nên  $t(1 + \dots + m) \leq 465$  mà  $m \geq 10$  nên  $t \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ .

Suy ra  $55t \leq 465$  nên  $n \leq 8$ . Vậy  $n$  lớn nhất bằng 8.

**Bài tập 7 (Hong Kong TST 2003).** Có 15 học sinh tham gia một khóa học. Biết rằng mỗi ngày, có 3 học sinh phải trực vệ sinh cho lớp và sau khi kết thúc khóa học thì cứ 2 học sinh bất kỳ đều tham gia trực chung đúng 1 lần. Tính số ngày khóa học diễn ra.

*Lời giải.* Giả sử khóa học có  $m$  ngày. Ta gọi  $S$  là số bộ  $(x, y, z)$  trong đó hai học sinh  $x, y$  cùng tham gia trực nhật vào ngày thứ  $z$  của khóa học.

Vì 2 học sinh bất kỳ đều tham gia trực nhật chung đúng một lần nên  $S = C_{15}^2 = 105$ . Mặt khác mỗi ngày có 3 học sinh tham gia trực nhật nên  $S = mC_3^2 = 3m$ .

$$\text{Vậy } m = \frac{105}{3} = 35.$$

**Bài tập 8 (IMO 1989).** Cho  $n$  và  $k$  là các số nguyên dương mà tồn tại một tập  $T$  có  $n$  điểm trong mặt phẳng sao cho

- i) Không có 3 điểm nào thẳng hàng;
- ii)  $\forall P \in T$  có ít nhất  $k$  điểm thuộc  $T$  mà cách đều  $P$ .

Chứng minh rằng  $k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ .

*Lời giải.* Gọi  $S$  là số các bộ 3 điểm  $(\{A, B\}, C)$  mà  $A, B$  cách đều  $C$ .

Trước hết ta đếm theo  $\{A, B\}$ : Với mỗi cặp điểm  $\{A, B\}$  thì các điểm cách đều  $A$  và  $B$  nằm trên trung trực của đoạn  $AB$ . Mà không có 3 điểm nào thẳng hàng trong  $T$  nên ta có chỉ có tối đa 2 điểm  $C$ . Vậy  $S \leq 2C_n^2$ .

Ta đếm theo  $C$ : Với mỗi điểm  $C$  có ít nhất  $k$  điểm trong  $T$  cách đều  $C$  nên số cặp  $\{A, B\}$  ít nhất là  $C_k^2$ . Do đó  $S \geq nC_k^2$ .

$$\text{Suy ra } 2C_n^2 \geq nC_k^2. \text{ Từ đó ta có: } k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

**Bài tập 9.** Cho  $X$  là một tập hữu hạn với  $|X| = n$  và  $A_1, A_2, \dots, A_m$  là các tập con của  $X$  có đúng 3 phần tử thỏa mãn  $|A_i \cap A_j| \leq 1 \forall i \neq j$ . Chứng minh rằng tồn tại một tập con  $A \subset X$  với ít nhất  $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$  phần tử mà không chứa bất kì tập  $A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) nào.

*Lời giải.* Giả sử  $A \subset X$  là một tập con với số phần tử lớn nhất là  $k$  mà không chứa bất kì tập  $A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) nào.

Gọi  $S$  là số bộ  $(\{a, b\}, c)$  thỏa mãn  $c \notin A$  và  $\{a, b\}$  là tập con của một trong một tập  $A_1, \dots, A_m$ .

Ta đếm theo  $c$ : Với mỗi  $c \notin A$  do tính cực đại của  $A$  thì sẽ tồn tại  $A_i \subset A \cup \{c\}$  khi đó chọn  $\{a, b\} = A_i \setminus \{c\}$ .

$$\text{Do vậy } S \geq n - k.$$

Ta đếm theo  $\{a, b\}$ : Do  $|A_i \cap A_j| \leq 1 \forall i \neq j$  nên với mỗi  $\{a, b\} \subset A$  tồn tại nhiều nhất một  $A_j \supset \{a, b\}$ , khi đó ta chọn  $c = A_j \setminus \{a, b\}$ . Do đó  $S \leq C_k^2$ .

$$\text{Suy ra } n - k \geq C_k^2 \text{ hay } k^2 + k \geq 2n \text{ nên } k \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8n}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } k \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor.$$



**Bài tập 10 (APMO 2006).** Trong một rạp xiếc, có  $n$  chú hề được trang điểm bằng một số trong tổng cộng 12 màu sơn. Biết rằng mỗi chú hề phải sử dụng ít nhất 5 màu. Ngoài ra, mỗi màu được sử dụng bởi không quá 20 chú hề. Chứng minh rằng  $n \leq 48$ .

*Lời giải.* Gọi số chú hề sử dụng màu sơn thứ  $i$  là  $a_i \leq 20$ . Ta có  $T = \sum_{i=1}^{12} a_i \geq 5n$ . Gọi  $S$  là số bộ  $(x, y, m)$  trong đó hai chú hề  $x, y$  cùng sử dụng màu sơn thứ  $m$ .

$$\text{Ta có } S = \sum_{i=1}^{12} C_{a_i}^2 \geq \frac{T(T-12)}{2 \cdot 12} \geq \frac{5n(5n-12)}{24}$$

Vì mỗi màu sơn được sử dụng bởi không quá 20 chú hề,  $S \leq 12C_{20}^2 = 2280$ .

$$\text{Ta có phương trình } \frac{5n(5n-12)}{24} \leq 2280 \Rightarrow n \leq 48.$$

**Bài tập 11 (China MO 1996).** Có 8 ca sĩ tham gia một chương trình văn nghệ với tổng cộng  $m$  buổi hòa nhạc. Trong mỗi buổi hòa nhạc, có 4 ca sĩ tham gia và số lần tham gia của mỗi cặp ca sĩ là như nhau và bằng  $n$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $m$ .

*Lời giải.* Ta gọi  $S$  là số bộ  $(A, b, c)$  trong đó ca sĩ  $b, c$  cùng tham gia buổi hòa nhạc  $A$ .

Vì hai ca sĩ bất kì cùng tham gia biểu diễn  $n$  buổi nên  $S = nC_8^2$ .

Mặt khác có  $m$  buổi biểu diễn và mỗi buổi có đúng 4 ca sĩ tham gia nên  $S = mC_4^2$ .

Do vậy  $nC_8^2 = mC_4^2$  hay  $14n = 3m$ . Suy ra  $14 \mid m$  nên  $m \geq 14$ . Giá trị nhỏ nhất của  $m$  là 14.

Dưới đây là một sách sắp xếp như vậy

Buổi \ Ca sĩ	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x	x	x	x				
2	x	x			x	x		
3	x	x					x	x
4			x	x	x	x		
5			x	x			x	x
6					x	x	x	x
7	x		x		x		x	
8	x		x			x		x
9	x			x	x			x
10	x			x		x	x	
11		x	x		x		x	
12		x	x			x		x
13		x		x	x			x
14		x		x		x	x	

**Bài tập 12 (VMO 2005).** Cho bát giác lồi  $A_1A_2\dots A_8$  mà không có ba đường chéo nào đồng quy. Giao của hai đường chéo tùy ý được gọi là một “nút”. Xét tất cả các tứ giác lồi được tạo thành bởi bốn đỉnh của bát giác đã cho và các tứ giác đó được gọi là “tứ giác con”. Hãy xác định số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất sao cho có thể tô màu  $n$  nút để với mọi  $i \neq k$  và  $i, k \in \{1, 2, \dots, 8\}$  thì các số  $s(i, k)$  bằng nhau, trong đó  $s(i, k)$  ký hiệu số tứ giác con nhận  $A_i, A_k$  làm đỉnh và giao của hai đường chéo là một nút được tô màu.

*Lời giải.* Bài toán này chính là bài toán China MO 1996. Thật vậy nếu ta coi các đỉnh của đa giác là các ca sĩ. Mỗi một nút được tô màu là là một buổi biểu diễn. Khi đó số  $s(i, k)$  chính là số buổi biểu diễn mà ca sĩ  $A_i, A_k$  cùng tham gia.

**Bài tập 13 (Chọn đội tuyển PTNK 2014).** Cho tập hợp  $X = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  và xét một họ  $\Omega$  gồm  $k$  tập con có 7 phần tử của  $X$ . Một tập hợp  $A \subset X$  được gọi là “tập mẹ” của họ  $\Omega$  nếu như  $A$  có 8 phần tử và tồn tại một tập hợp  $B \in \Omega$  sao cho  $B \subset A$ . Gọi  $d$  là số tất cả các tập mẹ của  $\Omega$ . Chứng minh rằng  $d \geq \frac{3}{2}k$ .

*Lời giải.* Gọi  $S$  là số bộ  $(B, A)$  sao cho  $B$  thuộc họ  $\Omega$  và  $A$  là mẹ của  $B$ .

Vì một tập  $B$  thì có 7 phần tử, vậy  $A$  muốn là mẹ của  $B$  thì  $A$  phải bổ sung thêm một trong 12 phần tử còn lại. Tức là mỗi tập  $B$  sẽ có 12 tập mẹ.  $S = k \cdot 12$

Mỗi tập  $A$  có 8 tập con có 7 phần tử nên mỗi tập mẹ  $A$  có nhiều nhất 8 tập con  $B$ . Ta có  $S \leq 8d$ .

Suy ra:  $12k \leq 8d$ . Vậy  $d \geq \frac{3}{2}k$ .

**Bài tập 14 (Russia 1996).** Ở một thành phố nọ, có 1600 đại biểu tham gia vào 16000 ủy ban và mỗi ủy ban có đúng 80 người tham gia. Chứng minh rằng có 2 ủy ban nào đó có ít nhất 4 đại biểu tham gia chung.

*Lời giải.* Gọi  $a_i$  là số ủy ban mà đại biểu thứ  $i$  tham gia. Ta gọi  $T$  là số bộ  $(x, Y)$  mà đại biểu  $x$  tham gia ủy ban  $Y$ .

Trước hết ta đếm theo  $Y$  thì  $T = 16000 \cdot 80$ .

Bây giờ ta đếm theo  $x$  thì  $T = \sum_{i=1}^{1600} a_i$ .

Suy ra  $\sum_{i=1}^{1600} a_i = 16000 \cdot 80$ .

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử 2 ủy ban bất kì có không quá 3 đại biểu chung.

Ta gọi  $S$  là số bộ  $(x, V, U)$  trong đó đại biểu  $x$  cùng tham gia cả 2 ủy ban  $U$  và  $V$ . Ta có  $S \leq 3C_{16000}^2$ .

Bây giờ ta đếm theo  $x$  thì  $S = \sum_{i=1}^{1600} C_{a_i}^2 \geq \frac{T(T-1600)}{2 \cdot 1600}$ .

Từ đó ta rút ra điều vô lý.

**Bài tập 15 (Bulgari MO 2006).** Một quốc gia có 16 thành phố và có 36 tuyến bay nối giữa chúng (chuyến bay ở đây là hai chiều). Chứng minh rằng ta có thể tổ chức một chuyến bay vòng quanh giữa 4 thành phố nào đó.

*Lời giải.* Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử với 2 sân bay  $A, B$  bất kì có không quá một thành phố  $C$  có thể bay đến cả  $A$  và  $B$ .

Gọi  $T$  là số bộ  $(A, B, C)$  mà cả  $A, B$  cùng bay được đến  $C$ .

Ta có  $T \leq C_{16}^2 = 120$ .

Giả sử thành phố thứ  $i$  có thể bay đến được  $a_i$  thành phố khác. Thì  $\sum_{i=1}^{16} a_i = 72$ .

Khi đó:  $\sum_{i=1}^{16} C_{a_i}^2 \geq \frac{72(72-16)}{2 \cdot 16} > 120$ . Vô lý.

*Nhận xét 2.4.* Đây là một bài toán hay, đối tượng mà ta cần đếm xuất hiện sau khi chúng phát biểu giả thiết phản chứng.

**Bài tập 16 (Chọn đội tuyển Bình Thuận).** Trong một hội nghị có 155 đại biểu tham dự và có 2015 cặp đại biểu quen biết nhau. Chứng minh rằng có thể chọn ra 4 đại biểu để xếp lên một bàn tròn sao cho hai đại biểu ngồi cạnh nhau thì có quen biết nhau.

*Lời giải.* Bài này cách giải hoàn toàn giống bài Bulgari MO 2006.

**Bài tập 17.** Trong một trường có 1001 học sinh tham gia vào một số câu lạc bộ, các câu lạc bộ hợp với nhau để tổ chức  $m$  hoạt động xã hội (một hoạt động có thể được tổ chức bởi một hoặc nhiều câu lạc bộ). Biết rằng

- i) Mỗi câu lạc bộ đều có lẻ thành viên và nếu câu lạc bộ có  $k$  thành viên thì nó tổ chức  $\frac{k-1}{2}$  hoạt động xã hội;
- ii) Với mỗi học sinh bất kì và một hoạt động bất kì thì có đúng một câu lạc bộ vừa tổ chức hoạt động xã hội đó và nhận học sinh đó là thành viên;
- iii) Hai học sinh bất kì tham gia đúng một câu lạc bộ;

Tìm  $m$ .

Lời giải.

Gọi  $S$  là số bộ  $(t, C, H)$  mà học sinh  $t$  tham gia câu lạc bộ  $C$  và câu lạc bộ  $C$  tổ chức hoạt động  $H$ . Vì với mỗi cặp  $t$  và  $H$  chỉ tồn tại duy nhất một  $C$  nên  $S = 1001m$ .

Nếu một câu lạc bộ có  $k$  thành viên thì nó tổ chức  $\frac{k-1}{2}$ . Giả sử có  $n$  câu lạc bộ và câu lạc bộ thứ  $i$  có  $k_i$  thành viên thì  $S = \sum_{i=1}^n k_i \frac{k_i-1}{2}$ .

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n \frac{k_i^2 - k_i}{2} = 1001m.$$

Gọi  $T$  là số bộ  $(a, b, C)$  là hai học sinh  $a, b$  cùng tham gia câu lạc bộ  $C$ . Vì hai học sinh bất kì chỉ tham gia đúng một câu lạc bộ nên  $T = C_{1001}^2$ .

$$\text{Mặt khác câu lạc bộ thứ } i \text{ có } k_i \text{ thành viên nên } T = \sum_{i=1}^n C_{k_i}^2.$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n \frac{k_i^2 - k_i}{2} = C_{1001}^2.$$

$$\text{Vậy } 1001m = C_{1001}^2 \text{ nên } m = 500.$$

**Bài tập 18.** Một trường có  $n$  học sinh và  $m$  câu lạc bộ. Mỗi câu lạc bộ có ít nhất 2 thành viên. Nếu 2 câu lạc bộ có nhiều hơn một thành viên chung thì số thành viên của 2 câu lạc bộ khác nhau.

a) Gọi  $a_i$  là số câu lạc bộ có  $i$  thành viên. Chứng minh  $a_i \leq \frac{C_n^2}{C_i^2}$ ;

b) Chứng minh  $m \leq n - 1$ ;

Lời giải.

a) Ta gọi  $S$  là số bộ  $(x, y, C)$  mà hai học sinh  $x, y$  cùng tham gia CLB  $C$  có  $i$  thành viên. Trước hết ta đếm theo  $x$  và  $y$ . Vì 2 câu lạc bộ có cùng hai thành

viên  $x, y$  chung thì số thành viên của 2 câu lạc bộ khác nhau nên có nhiều nhất một câu lạc bộ có  $i$  thành viên và chứa  $x, y$ .

Suy ra  $S \leq C_n^2$ .

Bây giờ ta đếm theo  $C$ , số câu lạc bộ có  $i$  thành viên là  $a_i$  nên số cách chọn  $C$  là  $a_i$ . Với mỗi câu lạc bộ có  $i$  thành viên số số cách chọn  $x, y$  là  $C_i^2$  nên  $S = \sum a_i C_i^2$  suy ra  $a_i C_i^2 \leq C_n^2$ .

Vậy  $a_i \leq \frac{C_n^2}{C_i^2}$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=2}^n a_i \leq \sum_{i=2}^n \frac{C_n^2}{C_i^2} = \sum_{i=2}^n \frac{n(n-1)}{i(i-1)} \\ &= n(n-1) \sum_{i=2}^n \left( \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = n(n-1) \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = (n-1)^2 \end{aligned}$$

**Bài tập 19.** Cho 6 điểm nằm trong mặt phẳng và không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi cạnh nối hai điểm được tô bởi hai màu xanh/đỏ. Hỏi có ít nhất bao nhiêu tam giác được tô cùng màu?

*Lời giải.* Gọi  $S$  là số bộ  $(A, B, C)$  sao cho cạnh  $AB, AC$  được tô cùng màu.

Giả sử số tam giác được tô cùng màu là  $n$  thì số tam giác được tô không cùng màu là  $C_6^3 - n = 20 - n$ .

Với mỗi tam giác cùng màu số bộ  $(A, B, C)$  là 3.

Với mỗi tam giác không được tô cùng màu thì số bộ  $(A, B, C)$  là 1.

Vậy  $S = 3n + 20 - n = 20 + 2n$ .

Với mỗi đỉnh  $C$  là gọi  $a_1$  là số cạnh màu đỏ nhận  $C$  làm đầu mút và  $a_2$  là số cạnh màu xanh nhận  $C$  làm đầu mút. Ta có  $a_1 + a_2 = 5$ .

Và  $C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 \geq C_3^2 + C_2^2 = 4$  nên  $S \geq 6.4 = 24$ .

Suy ra  $20 + 2n \geq 24$  nên  $n \geq 2$ .

**Bài tập 20 (Ukraine TST 2013).** Cho đa giác lồi có 17 đỉnh  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{17}$  và với hai đỉnh  $A_i, A_j$  bất kỳ trong số các đỉnh của đa giác, ta định hướng cho đoạn thẳng nối chúng để có vectơ:  $\overrightarrow{A_i A_j}$  hoặc  $\overrightarrow{A_j A_i}$ . Sau khi thực hiện với mọi cặp đỉnh, gọi  $S$  là số tam giác có tổng các vectơ đặt trên 3 cạnh là  $\vec{0}$ . Tìm GTNN và GTLN của  $S$ .

*Lời giải.* Gọi số tam giác có tổng các vector trên 3 cạnh bằng  $\vec{0}$  là  $n$ .

Ta gọi  $S$  là số bộ 3 điểm  $(A, B, C)$  trong 17 đỉnh mà có hai vector  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$  hoặc  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$  tức là với với các vector đặt trên hai cạnh  $AC, BC$  thì  $C$  cùng là điểm đầu hoặc cùng là điểm cuối.

Với mỗi tam giác mà tổng các vector đặt trên các cạnh bằng  $\vec{0}$  thì số bộ như trên bằng 0.

Với mỗi tam giác mà tổng các vector đặt trên các cạnh khác  $\vec{0}$  thì số bộ như trên bằng 2.

$$\text{Vậy } S = 2(C_{17}^3 - n) = 1360 - 2n.$$

Với mỗi điểm  $A_i$  ta gọi  $d_i$  là số vector nhận  $A_i$  là điểm đầu và  $c_i$  là số vector nhận  $A_i$  là điểm cuối.

$$\text{Ta có } d_i + c_i = 16 \text{ và } C_{c_i}^2 + C_{d_i}^2 \geq \frac{16(16-2)}{2.2} = 56.$$

$$\text{Nên } S \geq 56.17 = 952.$$

$$\text{Suy ra } 1360 - 2n \geq 952 \Rightarrow n \leq 204$$

**Bài tập 21 (China MO 2007).** Trong một trường THPT, có 2007 học sinh nam và 2007 học sinh nữ. Mỗi học sinh tham gia không quá 100 CLB ở trường. Biết rằng hai học sinh bất kỳ khác giới tính đều có tham gia ít nhất 1 CLB chung nào đó. Chứng minh rằng có 1 CLB mà có ít nhất 11 thành viên nam và 11 thành viên nữ.

*Lời giải.* Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử mỗi câu lạc bộ đều có nhiều nhất 10 học sinh nam hoặc nhiều nhất 10 học sinh nữ. Gọi  $S$  là số bộ  $(A, B, C)$  mà học sinh nam  $A$  và học sinh nữ  $B$  tham gia câu lạc bộ  $C$ .

Vì mỗi học sinh nam và học sinh nữ bất kì tham gia ít nhất một câu lạc bộ nên  $S \geq 2007^2$ .

Ta chia các câu lạc bộ thành 2 trường hợp.

TH1: Câu lạc bộ có không quá 10 nam. Số học sinh nữ là 2007 và mỗi học sinh tham gia không quá một câu lạc bộ nên số cặp  $(B, C)$  trong trường hợp này không vượt quá:  $2007.100$  vì thế số bộ  $(A, B, C)$  không vượt quá  $10.2007.100$ .

TH2: Câu lạc bộ có không quá 10 nữ. Số bộ  $(A, B, C)$  trong trường hợp này không quá  $2007.10.100$ .

$$\text{Suy ra: } S \leq 2.2007.10.100 = 2000.2007.$$

Vì vậy  $2007^2 \leq 2000.2007$ . Vô lý.

**Bài tập 22 (Trường Xuân 2013).** Cô giáo có tất cả  $X$  viên kẹo gồm 11 loại kẹo khác nhau. Cô chia cho các học sinh của mình mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận nhiều hơn một viên kẹo ở cùng một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kì so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp bất kì đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là  $M$ . Xác định giá trị nhỏ nhất của  $M$ .

a) Khi  $X = 2013$ ;

b) Khi  $X = 2017$ ;

*Lời giải.* Ta đánh số các loại kẹo từ 1 đến 11 giả sử số viên kẹo loại  $i$  là  $a_i$ . Ta có  $\sum_{i=1}^{11} a_i = X$ . Ta thấy  $M = \sum_{i=1}^{11} C_{a_i}^2$

a) Khi  $X = 2013$  ta có  $11 \mid 2013$ .

Ta thấy  $M \geq \frac{2013(2013-11)}{2 \cdot 11} = 183183$  Đẳng thức xảy ra khi  $a_i = \frac{2013}{11} = 183$

b) Khi  $X = 2017$  ta có  $2017 = 11 \cdot 183 + 4$  nên

$$M \geq 7C_{183}^2 + 4C_{184}^2 = 183915.$$

**Bài tập 23 (IMO 1998).** Trong một cuộc thi có  $a$  thí sinh và  $b$  giám khảo, trong đó  $b \geq 3$  là một số nguyên lẻ. Mỗi giám khảo đánh giá một thí sinh là "đạt" hoặc "trượt". Giả sử  $k$  là một số sao cho, với 2 giám khảo bất kì, đánh giá của họ là như nhau với nhiều nhất  $k$  thí sinh. Chứng minh rằng

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

*Lời giải.* Gọi  $T$  là số bộ  $(\{g_1, g_2\}, s)$  trong đó giám khảo  $g_1$  và  $g_2$  có cùng đánh giá với thí sinh  $s$ .

Vì hai giám khảo bất kì có cùng đánh giá với nhiều nhất  $k$  thí sinh nên  $T \leq kC_b^2$ .

Với một thí sinh  $s$  bất kì, giả sử có  $p$  giám khảo đánh giá "đạt" và  $q$  giám khảo đánh giá "trượt". Ta có  $p + q = b$  và số cặp giám khảo có cùng đánh giá với  $s$  là:

$$C_p^2 + C_q^2 = \frac{p^2 + q^2 - p - q}{2} \geq \frac{\frac{(b-1)^2}{4} + \frac{(b+1)^2}{4} - b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}$$

**Bài tập 24 (China TST 1992).** Có 16 học sinh tham gia một cuộc thi có  $n$  câu hỏi và mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn. Biết rằng 2 học sinh bất kì có không quá 1 câu trả lời chung cho tất cả các câu hỏi. Tìm giá trị lớn nhất của  $n$ .

*Lời giải.* Gọi  $S$  là số bộ  $(\{h_1, h_2\}, c)$  mà 2 học sinh  $h_1$  và  $h_2$  có cùng câu trả lời với câu hỏi  $c$ .

Vì 2 học sinh có không có quá một câu trả lời chung cho các câu hỏi nên  $S \leq C_{16}^2 = 120$ .

Với mỗi câu hỏi  $c$  có bốn phương án trả lời, gọi số thí sinh chọn phương án thứ  $i$  là  $a_i$ . Ta có  $\sum_{i=1}^4 a_i = 16$ .

Khi đó số cặp thí sinh  $\{h_1, h_2\}$  mà có cùng câu trả lời cho câu hỏi  $c$  là:

$$C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + C_{a_3}^2 + C_{a_4}^2 \geq \frac{16(16-4)}{2.4} = 24$$

Ta có:  $S \geq 24n$ .

Suy ra  $24n \leq 120$  hay  $n \leq 5$ .

**Bài tập 25.** Một CLB có  $n$  thành viên và họ đã tham gia vào 12 buổi chuyên đề, mỗi buổi có 24 thành viên tham gia. Biết rằng hai thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $n$ ;

b) Câu hỏi tương tự nếu có 10 buổi chuyên đề và mỗi buổi có 7 thành viên tham gia.

*Lời giải.*

a) Trước hết ta chuyển đổi giả thiết của bài toán "hai thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi" thành "hai buổi bất kỳ có không quá một thành viên chung".

Ta đánh số các thành viên từ 1 đến  $n$ . Gọi  $a_i$  số buổi chuyên đề mà thành viên thứ  $i$  tham gia thì  $\sum_{i=1}^n a_i = 12.24 = 288$ .

Gọi  $T$  là số bộ  $(a, B, C)$  mà thành viên  $a$  tham gia vào cả 2 buổi chuyên đề  $B, C$ . Vì hai buổi bất kỳ có không quá một thành viên chung nên  $T \leq C_{12}^2 = 66$ .

$$\text{Ta có } T = \sum_{i=1}^n C_{a_i}^2 \geq \frac{288(288-n)}{2n}.$$

Suy ra:  $66 \geq \frac{288(288-n)}{2n}$ . Dẫn đến  $n \geq 198$ .

Ta thấy  $\lfloor \frac{288}{198} \rfloor = 1$  nên các số  $a_i$  chỉ nhận giá trị bằng 1 hoặc 2.

Giả sử có  $k$  số  $a_i$  bằng 1 khi đó  $T = k$  suy ra  $k \leq 66$ .

Suy ra:  $288 = 2k + (n - k) = n + k \leq n + 66$ . Vậy  $n = 222$  là giá trị nhỏ nhất.

Khi đó ta có 66 số  $a_i$  bằng 2 và 156 số  $a_i$  bằng 1.

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n a_i = 10.7 = 70.$$

Gọi  $T$  là số bộ  $(a, B, C)$  mà thành viên  $a$  tham gia vào cả 2 buổi chuyên đề  $B, C$ . Vì hai buổi bất kỳ có không quá một thành viên chung nên  $T \leq C_{10}^2 = 45$ .

$$\text{Ta có } T = \sum_{i=1}^n C_{a_i}^2 \geq \frac{70(70-n)}{2n}.$$

Suy ra:  $45 \geq \frac{70(70-n)}{2n}$ . Dẫn đến  $n \geq 31$ .

Ta thấy  $\lfloor \frac{70}{31} \rfloor = 2$  nên các số  $a_i$  chỉ nhận giá trị bằng 2 hoặc 3.

Giả sử có  $k$  số  $a_i$  bằng 3 khi đó  $T = n - k + 3k = n + 2k$  suy ra  $n + 2k \leq 45$ .

Suy ra:  $70 = 3k + 2(n - k) = 2n + k = \frac{3n}{2} + \frac{n}{2} + k \leq \frac{3n}{2} + \frac{45}{2}$ . Vậy  $n \geq 32$ .



Vậy giá trị nhỏ nhất của  $n$  là 32. Khi đó ta có  $k = 6$  số  $a_i$  bằng 3 và 26 số  $a_i$  bằng 2.

**Bài tập 26.** Trên mặt phẳng cho tập hợp  $A$  gồm 66 điểm phân biệt và tập hợp  $B$  gồm 16 đường thẳng phân biệt. Gọi  $m$  là số bộ  $(a, b)$  sao cho  $a \in A, b \in B, a \in b$ . Chứng minh rằng  $m \leq 159$ .

*Lời giải.* Để  $m$  đạt giá trị lớn nhất thì tất cả điểm của  $A$  phải thuộc vào các đường thẳng của  $B$ . Ta đặt tên các điểm là  $A_1, \dots, A_{66}$ . Gọi số đường thẳng trong tập  $B$  đi qua điểm  $A_i$  là  $a_i$ . Ta có  $\sum_{i=1}^{66} a_i = m$ .

Gọi  $T$  là số bộ  $(X, d_i, d_j)$  mà  $X \in A$  là giao điểm của  $d_i$  và  $d_j$  và  $d_i, d_j \in B$ .

Rõ ràng  $T \leq C_{16}^2 = 8.15 = 120$ .

Mặt khác  $T = \sum_{i=1}^{66} C_{a_i}^2 \geq \frac{m(m-66)}{2.66}$ .

Ta có:  $120 \geq \frac{m(m-66)}{2.66}$ . Suy ra  $m \leq 163$ .

Ta có  $\lfloor \frac{m}{66} \rfloor \leq 2$  nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của  $m$  ra khi  $a_i$  nhận các giá trị là 2 hoặc 3.

Giả sử có  $k$  giá trị  $a_i$  bằng 3 thì  $m = 3k + 2(66 - k) = 132 + k$ .

Và  $T = 3k + (66 - k) = 66 + 2k = 2(k + 132) - 198 = 2m - 198$ .

Suy ra:  $2m - 198 \leq 120$  nên  $m \leq 159$ .

Đẳng thức xảy ra khi có 27 số  $a_i$  nhận giá trị bằng 3 và 39 số  $a_i$  nhận giá trị bằng 2.

*Nhận xét 2.5.* Bài toán này thực tế giống bài toán trên vì có một tính chất mà người giải bài toán phải tự nhận thấy là "hai đường thẳng phân biệt có không quá một điểm chung".

**Bài tập 27 (IMO Shortlist 1995).** Một cuộc họp có  $12k$  người và mỗi người bắt tay với đúng  $3k + 6$  người còn lại. Biết rằng với mọi cách chọn cặp hai người, số người bắt tay với cả hai là như nhau. Tính số người trong cuộc họp.

*Lời giải.* Gọi  $S$  là số bộ  $(a, b, c)$  mà  $a$  bắt tay với cả  $b, c$ .

Nếu ta đếm theo  $a$  thì  $S = 12kC_{3k+6}^2$ . Với 2 người bất kì, thì số người bắt tay với cả 2 người không đổi, ta đặt bằng  $m$ .

Nếu ta đếm theo  $(b, c)$  thì  $S = mC_{12k}^2$ .

Suy ra  $m = \frac{3(k+2)(3k+5)}{12k-1} = 3\frac{3k^2+11k+10}{12k-1} \in \mathbb{Z}$ .

Giải phương trình nghiệm nguyên ta được  $k = 3$  và  $m = 6$ .

Vậy cuộc họp có 36 người.

**Bài tập 28.** Cho số nguyên tố  $p$ . Trên bàn cờ hình vuông có cạnh  $p^2 + p + 1$ , tìm số lớn nhất các ô có thể tô màu sao cho không tồn tại hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu và các cạnh song song với các cạnh của hình chữ nhật.

*Lời giải.* Giả sử ta tô màu  $n$  ô.

Gọi  $S$  là số bộ  $(c_i, c_j, h_k)$  trong đó các cột  $c_i$  và  $c_j$  và giao với hàng  $h_k$  tại hai ô được tô màu.

Để không xuất hiện hình chữ nhật nào có bốn đỉnh được tô màu thì với mỗi hai cột  $c_i$  và  $c_j$  thì có nhiều nhất một hàng  $h_k$  nên  $S \leq C_{p^2+p+1}^2$ .

Với mỗi hàng, ta giả sử số ô được tô màu trên hàng đó là  $a_i$  thì

$$\sum_{i=1}^{p^2+p+1} a_i = n.$$

$$\text{Khi đó } S = \sum_{i=1}^{p^2+p+1} C_{a_i}^2 \geq \frac{n(n-p^2-p-1)}{2(p^2+p+1)}.$$

$$\text{Suy ra } C_{p^2+p+1}^2 \geq \frac{n(n-p^2-p-1)}{2(p^2+p+1)}.$$

$$\text{Từ đó ta thu được } n \leq (p+1)(p^2+p+1).$$

Đẳng thức xảy ra khi mỗi hàng có  $p+1$  ô được tô màu và trên 2 cột bất kì chỉ có 2 ô nằm trên cùng một hàng được tô màu.

Việc chỉ ra một cách một cách tô màu thỏa mãn đẳng thức xin dành lại cho người đọc chuyên đề này.

### 2.2.3 Ma trận liên thuộc

Ma trận liên thuộc chỉ là hình thức trình bày lời giải cho các bài toán đếm bằng 2 cách, ta có thể trình bày lời giải dưới dạng ngôn ngữ tập hợp. Tuy nhiên trong nhiều bài cách trình bày bằng mà *ma trận liên thuộc* (Incidence Matrices) rất thuận tiện.

**Bài tập 29 (Iran 1999).** Giả sử  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ( $n \geq 2$ ) là các đường tròn bán kính 1. Không có 2 đường tròn nào tiếp xúc. Bất kì một đường tròn nào cũng cắt ít nhất một đường tròn khác. Giả sử  $S$  là tập hợp các điểm thuộc ít nhất 2 đường tròn (tập các giao điểm). Chứng minh rằng  $|S| \geq n$ .

*Lời giải.* Gọi tập các đường tròn là  $\mathcal{T}$  Giả sử  $|S| = s$ .

Với mỗi cặp  $(d, C_i)$  mà  $d \in S$  và đường tròn  $C_i$  đi qua  $d$ .

Ta gọi  $x(d, C_i)$  là số đường tròn đi qua điểm  $d$ .

Và  $y(d, C_i)$  là số điểm mà đường tròn  $C_i$  đi qua.

Với điểm  $d$  giả sử có một đường tròn  $C_j$  nữa đi qua điểm  $d$  thì đường tròn  $C_j$  và  $C_i$  cắt nhau tại một điểm  $d'$  nữa khác  $d$ .

$$\text{Suy ra } x(d, C_i) \leq y(d, C_j).$$

$$\text{Vì vậy ta có: } s = \sum_{\substack{d \in S, C \in \mathcal{T} \\ d \in C}} \frac{1}{x(d, C_i)} \geq \sum_{\substack{d \in S, C \in \mathcal{T} \\ d \in C}} \frac{1}{y(d, C_i)} = n$$

**Bài tập 30.** Cho  $S_1, S_2, \dots, S_m$  là các tập con phân biệt của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $|S_i \cap S_j| = 1$  với mọi  $i \neq j$ . Chứng minh rằng  $m \leq n$ .

*Lời giải.* Ta phản chứng giả sử  $m > n$ .

Ta thấy các tập  $S_i$  đều phải khác rỗng và ta chỉ cần xét với  $m \geq 2$ .

Lời giải này sẽ được chúng tôi trình bày thông qua Ma trận liên thuộc .

Trước hết ta lập một bảng ô vuông gồm  $m$  dòng, dòng thứ  $i$  sẽ ứng với tập  $S_i$  và  $n$  cột, cột thứ  $j$  sẽ ứng với phần tử  $j$  trong tập  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ô ở vị trí giao của cột thứ  $j$  và dòng thứ  $i$  sẽ được điền vào giá trị  $a_{ij}$ . Trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } j \in S_i \\ 0 \text{ nếu } j \notin S_i \end{cases}$$

Bây giờ ta xét trường hợp  $a_{ij} = 0$ . Nếu trên cột  $j$  có một số 1 giả sử là  $a_{kj} = 1$  thì  $|S_k \cap S_i| = 1$  nên trên dòng  $i$  cũng có một số 1. Và ta thấy rằng quy tắc này là một đơn ánh. Do đó, ta gọi  $R_i$  là tổng các số trên dòng thứ  $i$  và  $C_j$  là tổng các số trên cột thứ  $j$  thì  $C_j < R_i$ .

Suy ra  $m - C_j > n - R_i$  và  $\frac{C_j}{m - C_j} < \frac{R_i}{n - R_i}$ .

Gọi  $M$  là tổng các số trên bảng. Thì

$$\begin{aligned} M &= \sum_{j=1}^n C_j = \sum_{j=1}^n (m - C_j) \frac{C_j}{m - C_j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m (1 - a_{ij}) \right) \frac{C_j}{m - C_j} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{(1 - a_{ij}) C_j}{m - C_j} < \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{(1 - a_{ij}) R_i}{n - R_i} = \sum_{i=1}^m \frac{R_i}{n - R_i} \left( \sum_{j=1}^n (1 - a_{ij}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{R_i}{n - R_i} (n - R_i) = \sum_{i=1}^m R_i = M \end{aligned}$$

Vô lý nên  $m \leq n$ .

#### 2.2.4 Lựa chọn giữa đếm bằng hai cách và nguyên lý Drichlet

Có nhiều bài toán mà cách phát biểu với giả thuyết khiến chúng ta liên tưởng ngay đến phương pháp đếm bằng 2 cách nhưng nhiều khi lại không giải quyết ngay được mà phải sử dụng đến nguyên lý Drichlet.

**Bài tập 31 (Chọn ĐT Lương Thế Vinh, Đồng Nai).** Trong một thư viện người ta quan sát thấy được:

- i) Mỗi ngày có 5 người đọc sách.  
 ii) Hai ngày bất kì thì số người đọc sách là 9.

Hãy tính xem trong 1 tháng có bao nhiêu người đến đọc sách. Biết tháng đó có 30 ngày.

*Lời giải.* Giả sử có  $n$  người đến đọc sách. Gọi tập hợp những người tham gia đọc sách ngày thứ  $i$  là  $A_i$ .

Giả sử  $A_1 = \{b_1, \dots, b_5\}$ . Mỗi phần tử của  $A_1$  này phải thuộc vào các tập từ  $A_2, \dots, A_{30}$ . Gọi  $b_1$  là người tham gia nhiều ngày đọc sách nhất thì theo nguyên lý Dirichlet thì  $b_1 \geq 6$ .

Giả sử  $b_1$  tham gia đọc sách vào các ngày  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$  với  $m \geq 6$ .

Giả  $A_k$  không chứa  $b_1$ . Do  $|B| = 5$  nên tồn tại hai tập  $A_j$  và  $A_h$  mà  $A_j \cap B = A_h \cap B$ . Mặt khác  $|A_j \cap A_h| = 1$  nên  $A_j \cap A_h = a_1$ . Vô lý.

Suy ra  $a_1 \in A_k \quad \forall 1 \leq k \leq 30$ .

Vậy số người tham gia đọc sách là  $n = 30 \cdot 4 + 1 = 121$ .

**Bài tập 32 (Chọn đội tuyển Việt Nam 2014).** Trong một kỳ thi có 100 thí sinh và 24 vị giám khảo. Mỗi thí sinh được hỏi bởi đúng 10 giám khảo. Chứng minh rằng có 7 giám khảo mà mỗi thí sinh đều được hỏi bởi ít nhất một trong số họ.

*Lời giải.* Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử với 7 giám khảo bất kỳ luôn tồn tại một thí sinh không được hỏi bởi cả 7 giám khảo đó. Gọi  $S$  là số bộ  $(\{a_1, \dots, a_7\}, h)$  mà  $h$  không được hỏi bởi cả 7 giám thị  $a_1, \dots, a_7$ .

Ta có  $S \geq C_{24}^7$ .

Với mỗi thí sinh thì có 14 giám khảo không hỏi thí sinh đó. Nên  $S = 100C_{14}^7$ .

Suy ra  $C_{24}^7 \geq 100C_{14}^7$ . Điều này vô lý.

Tất nhiên bài tập này có thể giải bằng cách sử dụng nguyên lý Dirichlet.

## 2.3 Bài tập tự luyện

**Bài tập 33 (IMO 2001).** Hai mươi một cô gái và 21 chàng trai đã tham gia vào một cuộc thi toán học. Cho biết rằng

- i) mỗi thí sinh giải quyết nhiều nhất là sáu bài toán, và  
 ii) với mỗi cặp của một cô gái và một chàng trai, có ít nhất một bài đã được giải quyết bởi cả cô gái và chàng trai.

Chứng minh rằng có một bài được giải bởi ít nhất là ba cô gái và ít nhất là ba chàng trai.

**Bài tập 34 (IMO 2005).** Trong một cuộc thi toán học có 6 bài toán được đưa ra cho các thí sinh. Mỗi cặp bài tập được giải bởi nhiều hơn  $\frac{2}{5}$  số thí sinh. Không có thí sinh nào giải được cả 6 bài. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thí sinh mà mỗi người giải được đúng 5 bài.

**Bài tập 35 (IMO 1987).** Cho  $p_n(k)$  là số hoán vị của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 1$ ) có đúng  $k$  điểm cố định. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

**Bài tập 36.** Cho  $S$  là một tập với  $|S| = n$ . Giả  $S_1, \dots, S_m$  là các tập con của  $S$  sao cho  $S_i \not\subset S_j \quad \forall i \neq j$ . Chứng minh rằng  $m \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

**Bài tập 37.** Cho các tập hợp  $S_1, \dots, S_m$ , mỗi tập có 3 phần tử. Và  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ . Thỏa mãn:

- i)  $|S_i \cup S_j| = 1 \quad \forall i \neq j$ ;
- ii)  $\forall x, y \in S, x \neq y$  thì tồn tại một tập  $S_i$  mà  $x, y \in S_i$ .

Chứng minh rằng:  $|S| = 7$  và họ  $S_1, \dots, S_m$  tồn tại.

**Bài tập 38 (\*China TST 1990).** Cho 7 điểm trên mặt phẳng và ta vẽ các đường tròn qua đúng 4 điểm nào đó trong số chúng. Tính số đường tròn lớn nhất có thể có.

### 3 Phần kết luận

Chuyên đề đếm bằng hai cách này là một phần quan trọng trong nội dung tổ hợp mà tác giả đã giảng cho đội tuyển học sinh của trường và của tỉnh. Thực tế cho thấy việc dạy cho học sinh phương pháp đếm bằng hai cách trong giải toán tổ hợp là một cách hữu hiệu để nâng cao tư duy cho các em học sinh. Từ những bài tập đơn giản đếm số cặp, số bộ ba cho đến những bài tập phải sử dụng bất đẳng thức về tổ hợp hoặc những bài sử dụng Ma trận liên thuộc đã giúp rèn luyện khả năng giải toán cấp độ đơn giản đến phức tạp, làm cho các em học sinh không những nâng cao khả năng của bản thân mà còn yêu thích

các bài toán về tổ hợp - một điều cần thiết khi học nội dung tổ hợp. Hy vọng chuyên đề sẽ giúp ích cho các bạn đồng nghiệp đang làm cùng công việc với tôi.

## Tài liệu

- [1] Titu Andreescu, Zuming Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser, 2004.
- [2] Yufei Zhao, *Counting in Two Ways*, MOP 2007.
- [3] Đậu Hoàng Hưng, *Chuyên đề: Đếm bằng hai cách thông qua các bảng ô vuông trong các bài toán tổ hợp*.
- [4] Law Ka Ho, Leung Tat Wing and Li Kin Yin, *Double Counting*, Mathematical Excalibur, Vol. 13, No. 4, Nov.-Dec. 08.
- [5] Lê Phúc Lữ, *Chuyên đề: Đếm bằng hai cách trong các bài toán tổ hợp*
- [6] Zoran Kadelburg, Dusan Dukic, Milivoje Lukic and Ivan Matic, *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead, and some applications*, The teaching of mathematics 2005, vol. viii, 1, pp. 31–45.