Các bài toán hình học đề nghị cho IMO 2017

Bài 1 (G1-Bài do Italy đề xuất cho IMO 2017). Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ thỏa mãn $AB = BC = CD$, $\widehat{EAB} = \widehat{BCD}$ và $\widehat{EDC} = \widehat{CBA}$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua E vuông góc với BC và các đường thẳng AC và BD đồng quy.

Lời giải.

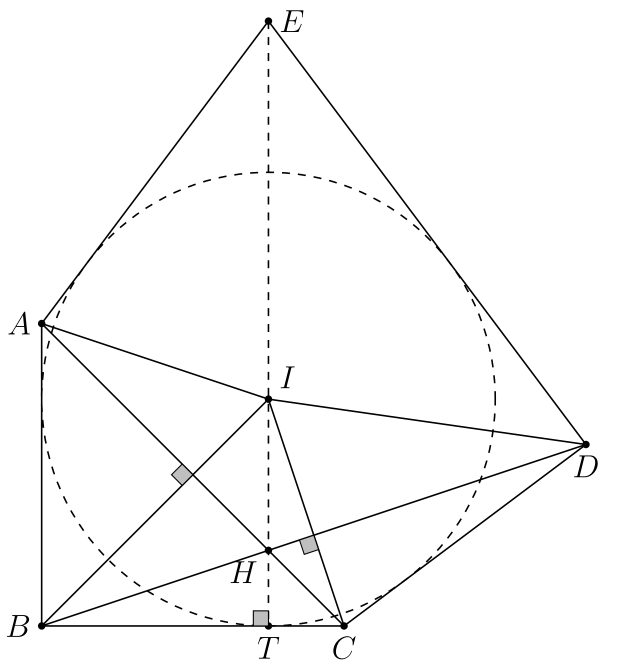
Cách 1: Đường trung trực của các đoạn AC, BD lần lượt đi qua B, C và cắt nhau tại I. Ta có $CI \perp BD$ và $BI \perp AC$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, trong tam giác BIC có H là trực tâm, nên $IH \perp BC$. Do đó, ta chứng minh E thuộc đường thẳng HI, hay $IE \perp BC$.

Các đường thẳng IB, IC tương ứng là phân giác của góc B và C. Ta có $IA = IC$, $IB = ID$ và $AB = BC = CD$ nên các tam giác IAB, ICB và ICD đồng dạng với nhau. Suy ra $\widehat{IAB} = \widehat{ICD} = \dfrac{C}{2} = \dfrac{A}{2}$, nên IA là phân giác của góc A. Tương tự, ID là phân giác của góc D. Suy ra I các đều tất cả các cạnh của ngũ giác. Do đó IE là phân giác của góc E.

Trong tứ giác $ABIE$ ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{BIE} &= 360^\circ - \widehat{EAB} - \widehat{ABI} - \widehat{AEI} \\
&= 360^\circ - \widehat{A} - \frac{1}{2}\widehat{B} - \frac{1}{2}\widehat{E} \\
&= 360^\circ - \widehat{A} - \frac{1}{2}\widehat{B} - \left(270^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}\right) \\
&= 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{B} = 90^\circ + \widehat{IBC},
\end{aligned}$$

nghĩa là ta có $EI \perp BC$, hay bài toán được chứng minh.



Cách 2: Ta trình bày cách khác chứng minh E thuộc đường thẳng IH.

Theo chứng minh trên, ngũ giác ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi T là tiếp điểm của (I) với BC. Áp dụng định lí Brianchon's cho lục giác $ABTCDE$, ta có AC, BD và ET đồng quy, hay E thuộc đường thẳng IT.

Cách 3: Chúng ta chỉ ra thêm một cách chứng minh $IE \perp BC$.

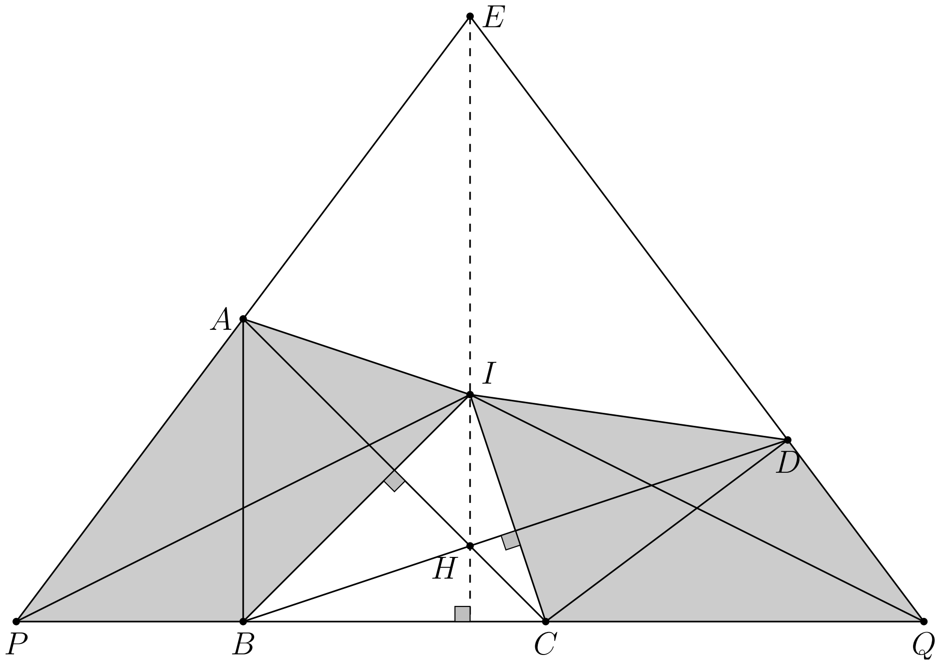
Trong ngũ giác $ABCDE$, ta có

$$E < 180^\circ \Leftrightarrow A + B + C + D > 360^\circ.$$

Suy ra $A + B = C + D > 180^\circ$, do đó tia EA và CB cắt nhau tại Q, tia ED và BC cắt nhau tại Q. Khi đó

$$\widehat{PBA} = 180^\circ - B = 180^\circ - D = \widehat{QDC},$$

tương tự $\widehat{PAB} = \widehat{QCD}$. Ta có $AB = CD$, nên $\triangle PAB = \triangle QCD$, do đó $\triangle PEQ$ cân tại E nên $EP = EQ$.



Trong lời giải ở cách 1 thì $\triangle IAB \backsim \triangle ICD$. Từ đó, suy ra hai tứ giác $PAIB$ và $QCID$ đồng dạng, do đó $IP = IQ$. Điều đó có nghĩa IE là đường trung trực của đoạn PQ, hay $EI \perp PQ \Leftrightarrow EI \perp BC$.

⚠**Nhận xét.** Ta thấy trong ba lời giải trên đều dùng đến điểm I. Tùy nhiên, có lời giải ta không cần dùng đến I, sau đây là một lời giải như vậy:

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác QCD ($P,\ Q$ là các điểm được xác định trong cách 3), ta chứng minh được $\triangle BHC \backsim \triangle CJD$. Gọi S là hình chiếu vuông góc của J lên CD, T là hình chiếu vuông góc của H lên BC, ta có

$$QT = QC + CT = QC + DS = QC + \frac{CD + DQ - QC}{2} = \frac{PB + BC + CQ}{2} = \frac{PQ}{2}.$$

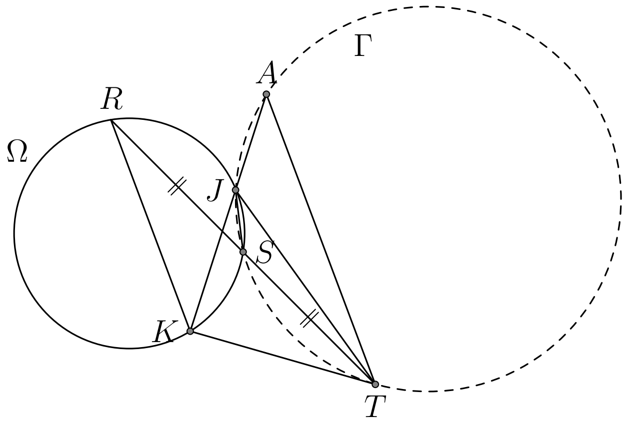
Do đó T là trung điểm của PQ. Vậy $H,\ T,\ E$ nằm trên đường trung trực của đoạn PQ.

$\square$

Bài 2 (G2-Bài 4 đề thi IMO 2017-Luxembourg đề xuất). Cho R và S là hai điểm phân biệt trên đường tròn Ω sao cho RS không phải là đường kính. Cho ℓ là tiếp tuyến tại R của Ω. Lấy điểm T sao cho S là trung điểm của đoạn thẳng RT. Lấy điểm J trên cung nhỏ $\widehat{RS}$ của Ω sao cho đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác JST cắt ℓ tại hai điểm phân biệt. Gọi A là giao điểm gần nhất R của Γ và ℓ. Đường thẳng AJ cắt lại Ω tại K. Chứng minh rằng KT tiếp xúc với Γ.

Lời giải.

Lời giải 1.



Xét đường tròn Ω, ta có $\angle KRS = \angle KJS$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{KS}$). (1)

Vì $AJST$ là tứ giác nội tiếp và A, J, K thẳng hàng nên

$\angle ATS = 180° - \angle AJS = \angle KJS.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$\angle KRS = \angle ATS = \angle RTA.$ (3)

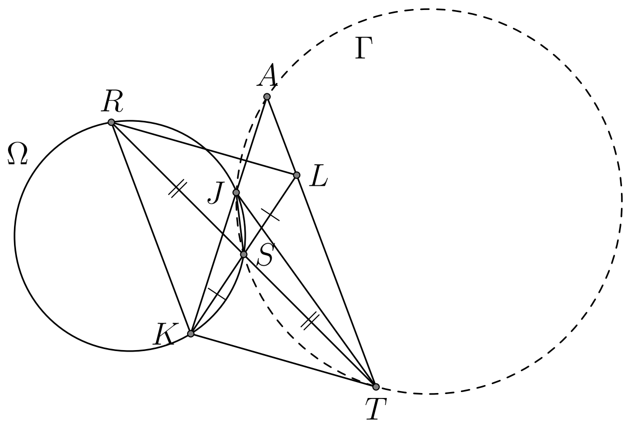
Vì AR tiếp xúc Ω tại R nên $\angle SKR = \angle RSA = \angle ART.$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\triangle SKR \sim \triangle ART$.

Do đó, với lưu ý S là trung điểm của AT, ta có $\dfrac{TR}{RK} = \dfrac{AT}{SR} = \dfrac{AT}{ST}.$ (5)

Từ (5) và (1), suy ra $\triangle TKR \sim \triangle AST$. Do đó $\angle KTR = \angle SAT$.

Lời giải 2.



Chứng minh như ở Lời giải 1, ta có:

$\angle KRS = \angle ATS$. Do đó, $RK \parallel TA$. Do S là trung điểm của RT nên lấy L đối xứng với K qua S thì tứ giác $RKTL$ là hình bình hành và do đó, L nằm trên đường thẳng TA. Vì AR tiếp xúc với Ω tại R và $RK \parallel TA$ nên $\angle ARS = \angle RKS = \angle SLT$. Suy ra, $RALS$ là tứ giác nội tiếp.

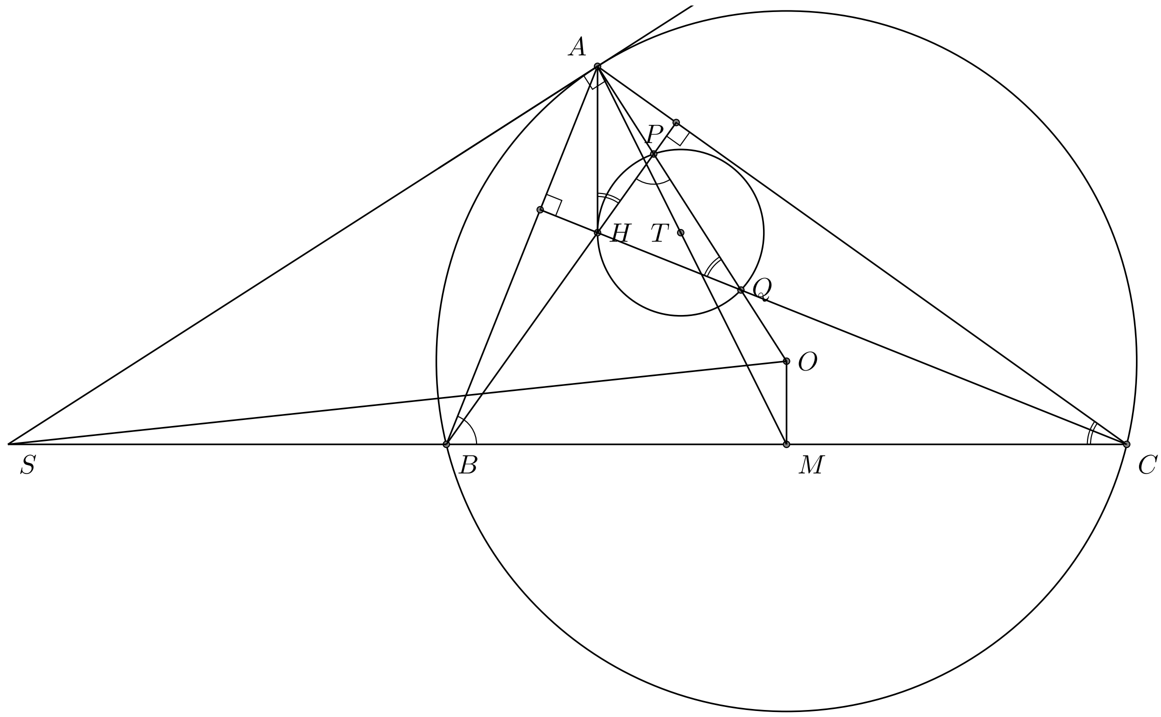
Kết hợp với $RL \parallel TK$ (do $RKTL$ là hình bình hành), ta được $\angle SAT = \angle SRL = \angle STK$. Suy ra, KT tiếp xúc với Γ tại T. $\square$

Bài 3 (G3-Bài do Ukraine đề xuất cho IMO 2017). Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Các đường cao kẻ từ B, từ C lần lượt cắt đường thẳng OA tại P và Q. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH nằm trên đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$. Ta có

$$\widehat{PQH} = 90^\circ - \widehat{QAB} = 90^0 - \widehat{OAB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{ACB}.$$



Tương tự ta có $\widehat{QPH} = \widehat{ABC}$. Do đó tam giác ABC và HPQ đồng dạng với nhau. Do

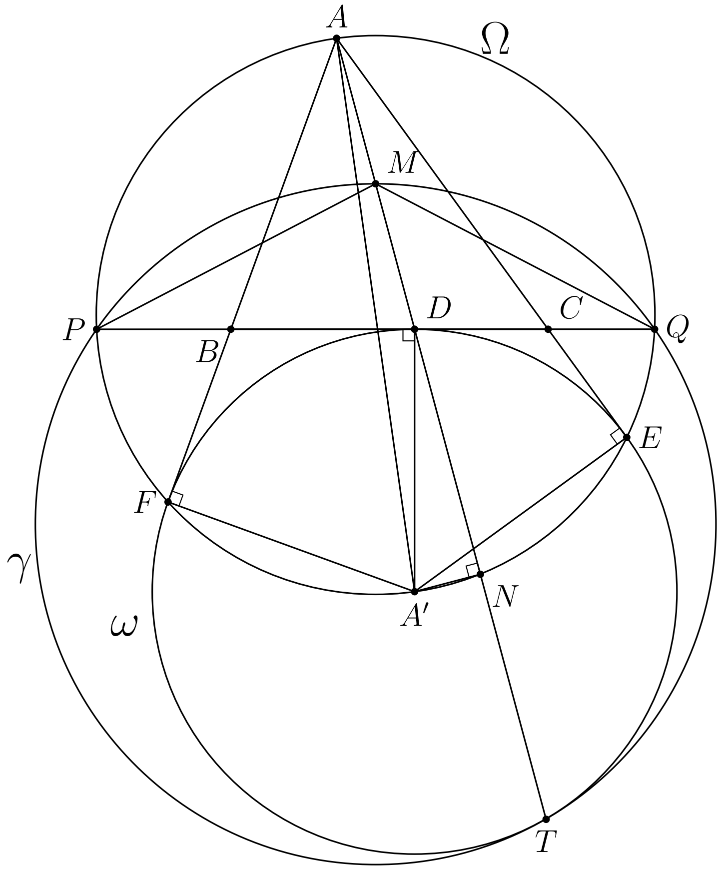
$$\widehat{AHP} = 90^0 - \widehat{HAC} = \widehat{ACB} = \widehat{HQP}$$

nên AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH. Gọi T là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH. Gọi M là giao điểm của AT và BC. Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường thẳng BC. Do tam giác ABC và HPQ đồng dạng với nhau nên $\widehat{OSM} = \widehat{TAO} = \widehat{OAM}$, suy ra bốn điểm M, O, A, S cùng nằm trên một đường tròn. Mà $\widehat{SAO} = 90^0$ nên $\widehat{SMO} = 90^0$, suy ra M là trung điểm BC. Như vậy T nằm trên đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 4 (G4-Bài do Đan Mạch đề xuất cho IMO 2017). Kí hiệu ω là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Gọi D, E, F tương ứng là các tiếp điểm của ω với các đường thẳng BC, CA, AB. Đường tròn (AEF) cắt đường thẳng BC tại P và Q. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng đường tròn (MPQ) tiếp xúc với đường tròn ω.

Lời giải.

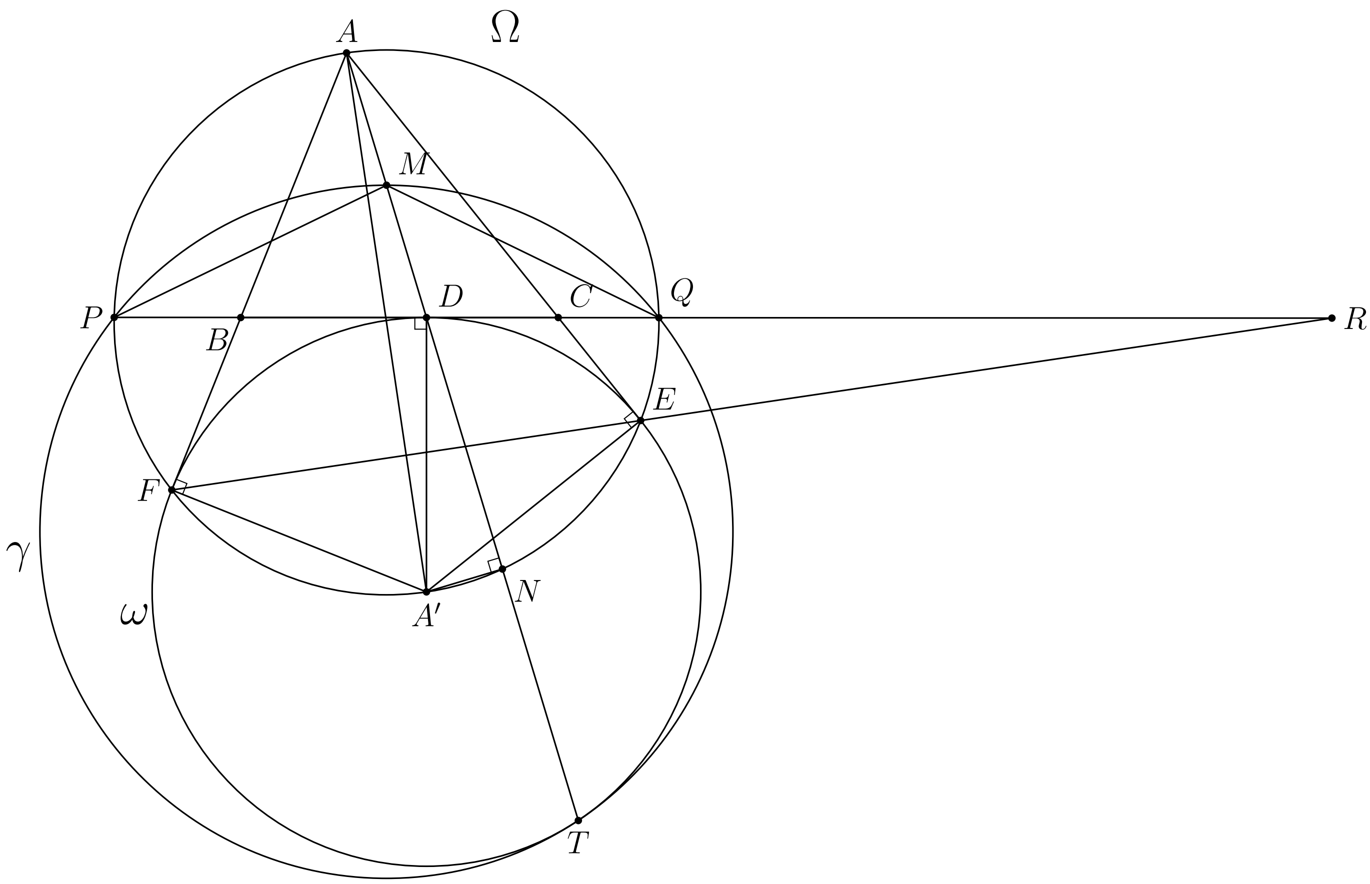
Lời giải 1.



Kí hiệu Ω là đường tròn $(AEFPQ)$ và γ là đường tròn (MNP). Gọi T là giao điểm thứ hai, khác D, của đưởng thẳng AD và đường tròn ω. Gọi A' là tâm của đường tròn ω. Vì $A'E \perp AE$ và $A'F \perp AF$ nên AA' là đường kính của Ω. Gọi N là trung điểm của DT. Vì A' là tâm của ω và $D, T \in \omega$ nên $\angle A'NA = 90°$. Do đó, $N \in \Omega$. Xét phương tích của D đối với các đường tròn γ và Ω, ta được:

$$DP \cdot DQ = DA \cdot DN = 2DM \cdot \frac{DT}{2} = DM \cdot DT.$$

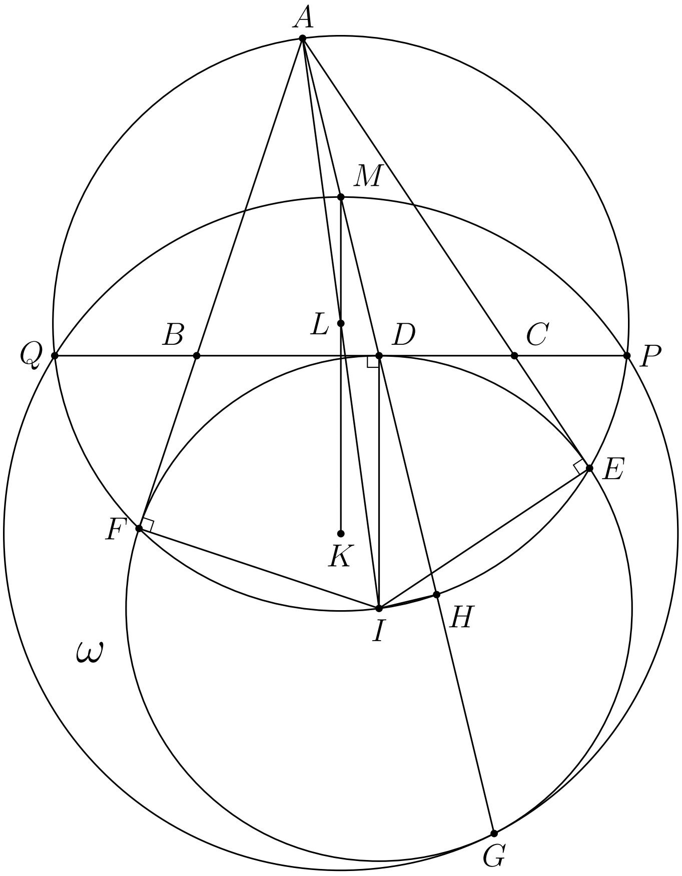
Suy ra, bốn điểm P, Q, M, T cùng thuộc một đường tròn. Xét hai trường hợp sau:



- *Trường hợp 1:* $EF \parallel BC$. Khi đó, ABC là tam giác cân; vì thế, ta có ngay điều phải chứng minh nhờ tính đối xứng. Gọi R là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại T của đường tròn ω. Ta có R, N, A' thẳng hàng (vì cùng thuộc trung trực của DT). Do đó, $RP \cdot RQ = RA' \cdot RN$.

- *Trường hợp 2:* EF không song song BC. Mặt khác, xét tam giác vuông $A'DR$, ta có $RD^2 = RN \cdot RA'$. Vì thế, $RD^2 = RP \cdot RQ$. Suy ra, $RT^2 = RP \cdot RQ$ (vì $RT = RD$). Do đó, RT tiếp xúc với γ tại T. Từ đây, vì RT tiếp xúc với ω tại T, hiển nhiên suy ra ω và γ tiếp xúc với nhau tại T.

Lời giải 2.



Gọi I, K và L theo thứ tự là tâm của các đường tròn ω, (MPQ) và AEF. Đường thẳng AD tương ứng cắt các đường tròn (AEF) và ω tại điểm thứ hai H và G. Ta sẽ chứng minh G nằm trên đường tròn (MPQ) và I, K, L thẳng hàng. Do $\angle AFI = \angle AEI = 90°$, nên AI là đường kính của đường tròn (L). Suy ra $IH \perp AH$ hay $IH \perp DG$. Do đó, H là trung điểm DG. Do M là trung điểm AD, H là trung điểm DG, nên $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{DH}}{\overline{DG}}$; suy ra

$$\overline{DM} \cdot \overline{DG} = \overline{DH} \cdot \overline{DA} = \mathscr{P}_{D/(L)} = \overline{DP} \cdot \overline{DQ}.$$

Suy ra $G \in (K)$. (1)

Xét hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* $AB = AC$. Tam giác ABC cân tại A, do đó A, D, G, I, K, L, M cùng nằm trên một đường thẳng. Vì thế, các đường tròn (MPQ) và ω tiếp xúc nhau tại G.

- *Trường hợp 2:* $AB \neq AC$. Do M là trung điểm của AD, L là trung điểm của AI, nên $ML \parallel DI$. Từ đó, do $ID \perp PQ$, suy ra $ML \perp PQ$. Bởi vậy, M, L, K thẳng hàng (do $LK \perp PQ$). Do $KM \parallel ID$ nên $\angle KGM = \angle KMG = \angle IDG = \angle IGD = \angle IGM$. Suy ra K, I, G thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các đường tròn (MPQ) và ω tiếp xúc với nhau tại G.

⚠**Nhận xét.** Bài toán này có liên quan gần gũi với kết quả cơ bản sau: *Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A. Tiếp tuyến tại một điểm M của đường tròn (O) cắt đường tròn*

(O') tại hai điểm B, C. Khi đó, đường thẳng AM sẽ đi qua điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ của đường tròn (O').

□

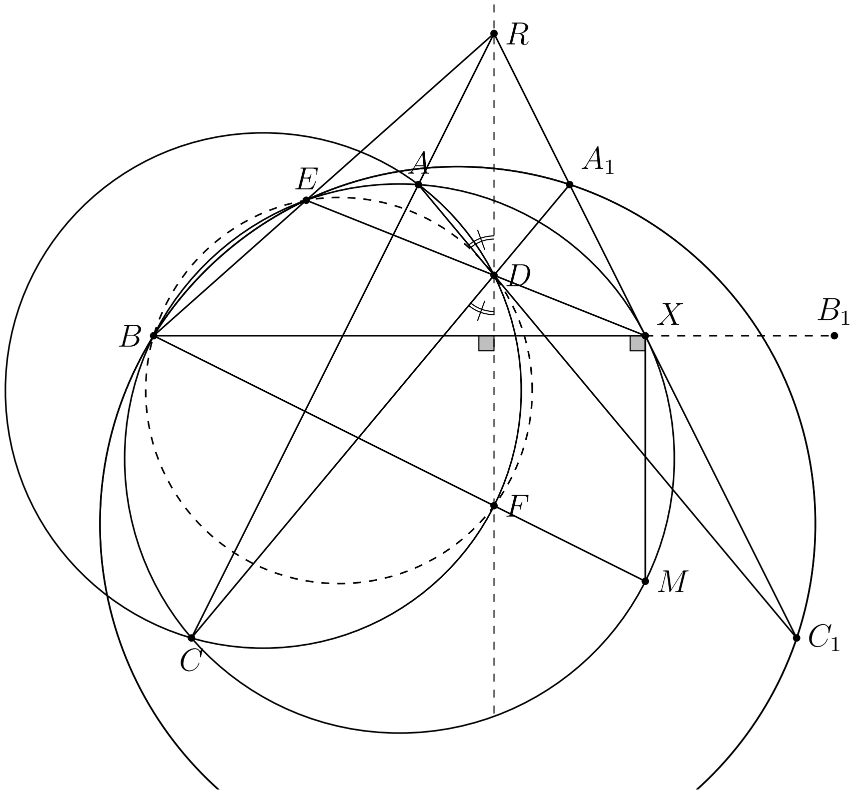
Bài 5 (G5-Bài do Ukraine đề xuất cho IMO 2017). Cho $ABCC_1B_1A_1$ là lục giác lồi thỏa mãn $AB = BC$ và đường trung trực của các đoạn thẳng $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ trùng nhau. Gọi D là giao điểm của AC_1 và A_1C, ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn ω cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1BC_1 tại điểm $E \neq B$. Chứng minh rằng BB_1 và DE cắt nhau tại một điểm nằm trên ω.

Lời giải.

Cách 1: Nếu $AA_1 = CC_1$ thì BB_1 là trục đối xứng của lục giác $ABCC_1B_1A_1$, do đó đường trong ngoại tiếp tam giác ABC và A_1BC_1 tiếp xúc trong tại B, hay bài toán hiển nhiên đúng. Không mất tính tổng quát, ta gải sử $AA_1 < CC_1$. Gọi R là tâm đẳng phương của hai đường tròn $(AEBC)$, (A_1EBC_1) và đường tròn ngoại tiếp của hình thang cân ACC_1A_1. Ta thấy R là điểm đồng quy của các đường thẳng BE, AC và A_1C_1. Do tính đối xứng của AC và A_1C_1 nên R nằm trên đường trung trực của các đoạn AA_1 và CC_1, đó cũng chính là phân giác ngoài của góc $\widehat{ADC}$. Gọi F là giao điểm thứ hai của DR với đường tròn (ACD), khi đó ta có

$$RB \cdot RE = RA \cdot RC = RD \cdot RF,$$

suy ra các điểm $B,\ E,\ F,\ D$ nằm trên một đường tròn. Vì đường thẳng RF là phân giác ngoài của góc $\widehat{ADC}$, nên F là trung điểm của cung $\widehat{CDA}$. Do $AB = BC$, nên trên đường tròn ω thì B là trung điểm của cung $\widehat{AEC}$. Kẻ đường kính BM cảu đường tròn ω, ta có M là điểm chính giữa cảu cung $\widehat{CA}$ của ω. Do đó $B,\ F,\ M$ nằm trên đường trung trực của đoạn AC, vì vậy chúng thẳng hàng.



Cuối cùng, do M nằm trên ω có BM là đường kính, nên $\widehat{BXM} = 90°$. Hơn thế nữa

$$\widehat{EXM} = 180° - \widehat{MBE} = 180° - \widehat{FBE} = \widehat{FDE},$$

suy ra $MX \parallel DF$. Lại có $BX \perp MX$ và $BB_1 \perp FD$ nên X nằm trên đường thẳng BB_1.

Cách 2: Ta định nghĩa M là đối xứng với B qua tâm của đường tròn ω, R là điểm đồng quy của các đường thẳng AC, A_1C_1 và BE, ta chứng minh được R nằm trên đường phân giác ngoài của góc $\widehat{ADC}$.

Ta có B là trung điểm của cung $\widehat{AEC}$, đường thẳng BER là phân giác ngoài của góc $\widehat{CEA}$.

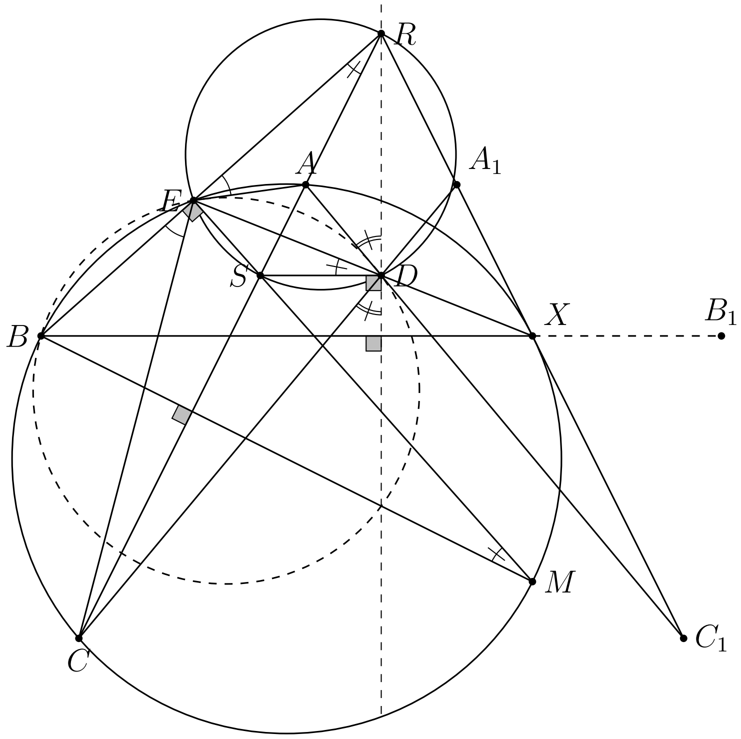
Bây giờ ta chứng minh phân giác ngoài của các góc $\widehat{ADC}$ và $\widehat{AEC}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đoạn AC.

Gọi S là giao điểm của phân giác ngoài góc $\widehat{ADC}$ với AC và S' là giao điểm của phân giác ngoài góc $\widehat{CEA}$ (là đường thẳng EM) với AC. Áp dụng tính chất của phân giác ta có

$$\frac{AS}{CS} = \frac{AD}{CD} = \frac{AR}{CR} = \frac{AE}{CE} = \frac{AS'}{CS'},$$

nên ta có $S = S'$.

Bởi $\widehat{RDS} = \widehat{SER} = 90°$ nên các điểm $R,\ S,\ D$ nằm trên đường tròn.



Gọi X là giao điểm của đường thẳng BB_1 và DE. Ta có $\widehat{EXB} = \widehat{EDS}$, vì BB_1 và DS cùng vuông góc với DR, $\widehat{EDS} = \widehat{ERS}$ và $\widehat{ERS} = \widehat{EMB}$ vì $SR \perp BM$ và $ER \perp ME$. Vì thế $\widehat{EXB} = \widehat{EMB}$, hay X nằm trên đường tròn ω.

□

Bài 6 (G6-Bài do Czech Republic đề xuất cho IMO 2017). Cho số nguyên $n \geq 3$, ta lấy 2 đa giác đều n- cạnh $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$. Chứng minh rằng các đỉnh của $\mathcal{A}$ nằm bên trong $\mathcal{B}$ hoặc trên biên của nó thì nối tiếp nhau. (Tức là, chứng minh tồn tại một đường thẳng chia các điểm của $\mathcal{A}$ nằm bên trong $\mathcal{B}$ hoặc trên biên của $\mathcal{B}$ từ các điểm khác của $\mathcal{A}$).

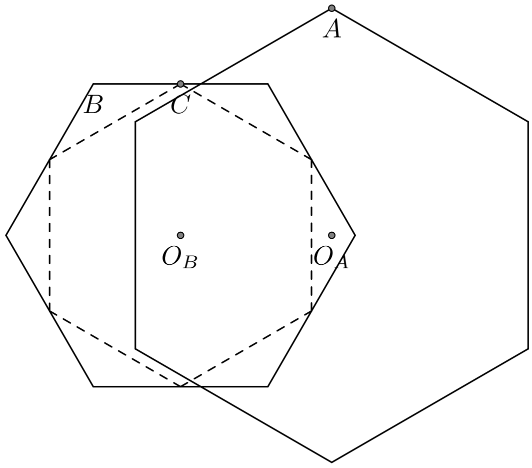
Lời giải.

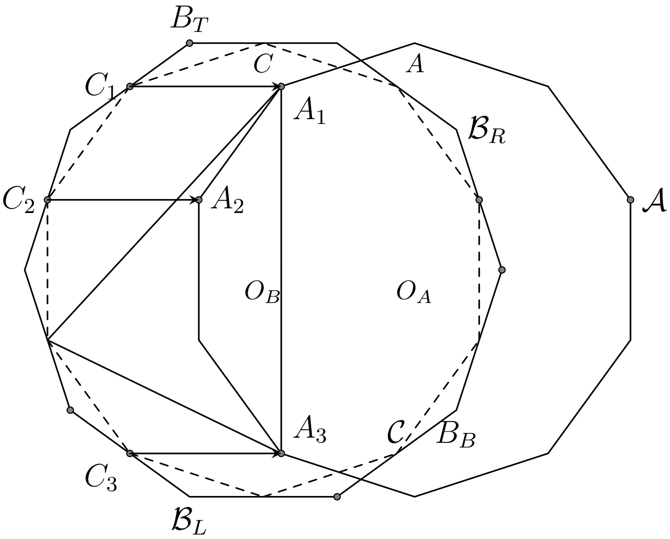
Trong chứng minh này, thì một *đa giác* được tính cả phần bên trong và phần biên của nó.

Ta sẽ tìm một đa thức đều n-cạnh $\mathcal{C}$ thỏa mãn

- được ghim vào $\mathcal{B}$ (tức là, mọi điểm của $\mathcal{C}$ nằm trên chu vi của $\mathcal{B}$).
- là ảnh tịnh tiến của $\mathcal{A}$, hoặc là ảnh vị tự của $\mathcal{A}$ với hệ số vị tự dương.

Ta lấy một đa giác được xác định như sau. Cho $O_{\mathcal{A}}$ và $O_{\mathcal{B}}$ là tâm của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$, lấy A là một đỉnh tùy ý của $\mathcal{A}$. Cho $\overrightarrow{O_BC}$ là vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{O_AA}$, với C nằm trên đường chu vi của $\mathcal{B}$. Quay C vòng quanh O_B bằng các góc $\dfrac{\pi}{n}$, ta sẽ được đa giác yêu cầu. Dễ thấy, nó là hình đều, được ghim vào $\mathcal{B}$ (vì mọi đỉnh của $\mathcal{C}$ nằm trên chu vi của $\mathcal{B}$), sau đó nó là ảnh tịnh tiến hoặc vị tự $\overrightarrow{O_AA}$ đến $\overrightarrow{O_BC}$ biến $\mathcal{A}$ thành $\mathcal{C}$. Ta chia làm hai trường hợp





TH1 : $\mathcal{C}$ là ảnh của $\mathcal{A}$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

Kí hiệu t là phép dịch chuyển tịnh tiến theo vector $\vec{v}$. Ta cần chứng minh rằng các điểm của $\mathcal{C}$ nằm trong $\mathcal{B}$ dưới t là nối tiếp nhau. Để hình dung, ta tham khảo hệ tọa độ Carte-sian với việc trục x là đẳng hướng theo $\vec{v}$. Bằng phương pháp này, khái niệm về phải/trái và trên/dưới được đưa ra, theo trục x và y tương ứng.

Cho B_T và B_B là phần đỉnh trên và đỉnh dưới của $\mathcal{B}$ (nếu một vài đỉnh là cân xứng hai bên, chúng ra lấy điểm ngoài cùng bên phải). Chúng chia chu vi của $\mathcal{B}$ vào phần bên phải $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ và phần bên trái $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ (đỉnh B_T và B_B là giả sử nằm cả hai đường); mỗi phần thành một tập con của chu vi hình $\mathcal{B}$. Do đó, các đỉnh của $\mathcal{C}$ được chia thành hai phần $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ và $\mathcal{C}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, đều gồm các điểm nối tiếp.

Bây giờ, tất cả các điểm của $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ (bao gồm cả $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$) di chuyển ra ngoài $\mathcal{B}$ dưới t, từ khi là điểm ngoài cùng bên phải của $\mathcal{B}$ trên đường ngang tương ứng. Đó là mấu chốt trong việc chứng minh các điểm của $\mathcal{C}$ nằm trong $\mathcal{B}$ dưới t là nối tiếp.

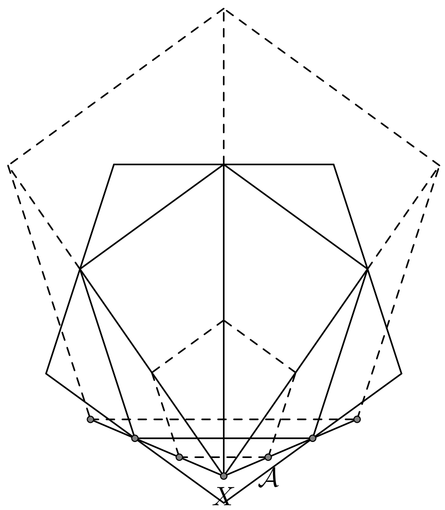
Với cùng cách làm, lấy C_1, C_2, và C_3 là ba điểm trên $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ sao cho C_2 nằm giữa C_1 và C_3, và đường $t(C_1)$ và $t(C_3)$ trong $\mathcal{B}$; chúng ta cần chứng minh rằng $t(C_2) \in \mathcal{B}$ là đúng. Cho $A_i = t(C_i)$. Đường qua (C_2) song song với $\vec{v}$ cắt đoạn thẳng C_1C_3 đến bên phải của C_2; điều đó có nghĩa là đường vượt quá A_1A_3 ở bên phải A_2, bởi A_2 nằm bên trong tam giác A_1CA_3 bao gồm của $\mathcal{B}$. Điều phải chứng minh.

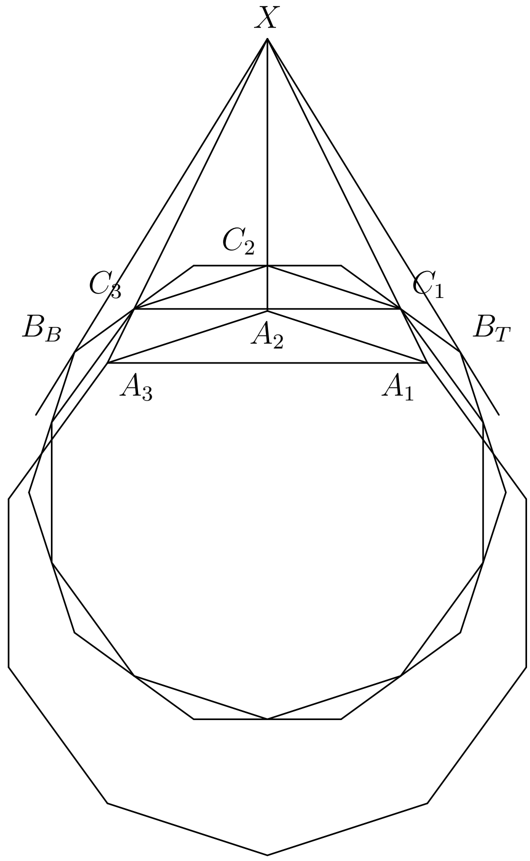
TH2 : $\mathcal{C}$ là ảnh vị tự của $\mathcal{A}$ với tâm là $\mathcal{X}$ với tỉ số đồng dạng $k > 0$.

Kí hiệu h là phép vị tự $\mathcal{C}$ đến $\mathcal{A}$. Chúng ta cần chứng minh rằng các điểm của $\mathcal{C}$ nằm trong $\mathcal{B}$ sau phép h là nối tiếp. Nếu $X \in \mathcal{B}$, khẳng định là đơn giản. Thật vậy, nếu $k < 1$, khi đó, các điểm của $\mathcal{A}$ nằm trên đoạn thẳng XC (C là một điểm trên $\mathcal{C}$) nằm trong $\mathcal{B}$. Nếu $k > 1$, khi đó các điểm của $\mathcal{A}$ nằm trên phần phần mở rộng ví dụ như của đoạn thẳng XC, và hầu hết những phần mở rộng đó nằm ngoài $\mathcal{B}$. Nếu trong trường hợp chỉ một hoặc hai điểm của $\mathcal{A}$ nằm trên miền biên của $\mathcal{B}$ thì các điểm còn lại vẫn nối tiếp.

Từ đây, chúng ta giả định $X \notin \mathcal{B}$.

Bây giờ, có hai điểm B_T và B_B của $\mathcal{B}$ sao cho $\mathcal{B}$ nằm trong góc $\angle B_T X B_B$. Với B_T, ta chọn điểm xa nhất với X khi $k > 1$, và là điểm gần nhất khi $k < 1$. Ta tham khảo không gian tọa độ Cartesian để trục y cùng hướng với $\overrightarrow{B_B B_T}$, và X nằm bên trái của đường $B_T B_B$. Chú ý rằng, chu vi của $\mathcal{B}$ chia bởi B_T và B_B thành bên phải $\mathcal{B}_R$ và bên trái $\mathcal{B}_L$, và tập các đỉnh của $\mathcal{C}$ chia thành hai tập con $\mathcal{C}_R \subset \mathcal{B}_R$ và $\mathcal{C}_L \subset \mathcal{B}_L$.

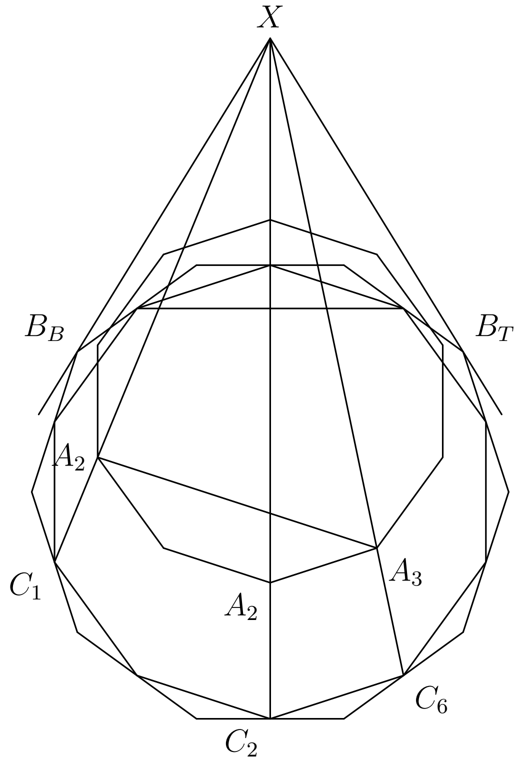




TH2.1 : $k > 1$.

Ta thấy các điểm của $\mathcal{B}_R$ (bao gồm cả $\mathcal{C}_R$) ra ngoài $\mathcal{B}$ sau h, bởi vì chúng là điểm xa nhất của $\mathcal{B}$ nằm trên các tia tương ứng từ điểm X. Nó cho thấy rằng các điểm của $\mathcal{C}_L$ nằm trong $\mathcal{B}$ là nối tiếp.

Theo cách tương tự, lấy C_1, C_2, C_3 là ba điểm của $\mathcal{C}_L$ sao cho C_2 nằm giữa C_1 và C_3, và $h(C_1)$ và $h(C_3)$ nằm trong $\mathcal{B}$. Cho $A_i = h(C_i)$. Khi đó tia XC_2 cắt C_1C_3 ngoài C_2, để tia đó băng qua A_1A_3 ngoài A_2; đơn giản thấy rằng A_2 nằm trong góc A_1CA_3, nằm bên trong $\mathcal{B}$, từ đó đơn giản thấy rằng $\mathcal{A}$ nằm trong góc $A_1C_2A_3$, bên trong $\mathcal{B}$.



TH2.2 : $k < 1$. Cách chứng minh tương tự như phần 1. Tất cả các điểm của $\mathcal{B}_L$ (bao gồm từ $\mathcal{C}_L$ di chuyển ra ngoài $\mathcal{B}$ qua phép h), bởi vì chúng là những điểm gần nhất của $\mathcal{B}$ nằm trên các tia tương ứng từ X. Giả định rằng C_1, C_2, C_3 là ba điểm trên $\mathcal{C}_R$ sao cho C_2 nằm giữa C_1 và C_3, và $h(C_1)$ và $h(C_3)$ nằm trong $\mathcal{B}$; lấy $A_i = h(C_i)$. Khi đó A_2 nằm trên đoạn thẳng XC_2, và đoạn thẳng XA_2 và A_1A_3 cắt nhau. Dễ thấy A_2 nằm trong góc A_1CA_3, chứa bên trong $\mathcal{B}$.

□

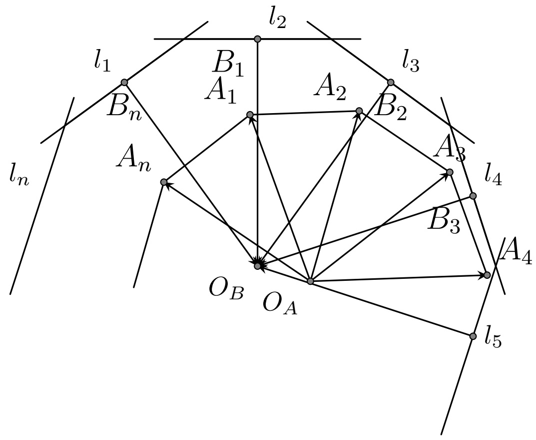
Cách 2

Cho O_A và O_B là tâm của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$. Kí hiệu $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ta đưa ra cách liệt kê và kí hiệu thích hợp. Liệt kê $\mathcal{B}$ các đường thẳng chứa các cạnh theo chiều kim đồng hồ là l_1, l_2,…, l_n. Kí hiệu $\mathcal{H}_i$ là nửa không gian của l_1 chứa $\mathcal{B}$ (coi $\mathcal{H}_i$ chứa l_i); cho B_i là *điểm chính giữa* của phần thuộc vào l_i; và cuối cùng kí hiệu $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{B_iO_B}$. (Như thường lệ, số vòng tuần hoàn theo modulo n, bởi vậy $l_{n+i} = l_i$).

Bây giờ, chọn một đỉnh A_1 của $\mathcal{A}$ sao cho vector $\overrightarrow{O_AA_1}$ gồm các điểm "hầu hết ngoài $\mathcal{H}_1$"; nói cách khác, điều đó có nghĩa là tích vô hướng $< \overrightarrow{O_AA_1}, \overrightarrow{b_1} >$ là nhỏ nhất. Bắt đầu từ A_1, đếm số đỉnh của $\mathcal{A}$ cùng chiều kim đồng hồ là $A_1, A_2, \ldots, A_n$; bằng phép đối xứng quay, sự chọn lựa A_1 rằng vector $\overrightarrow{O_AA_i}$ điểm "hầu hết ngoài $\mathcal{H}_i$", ví dụ,

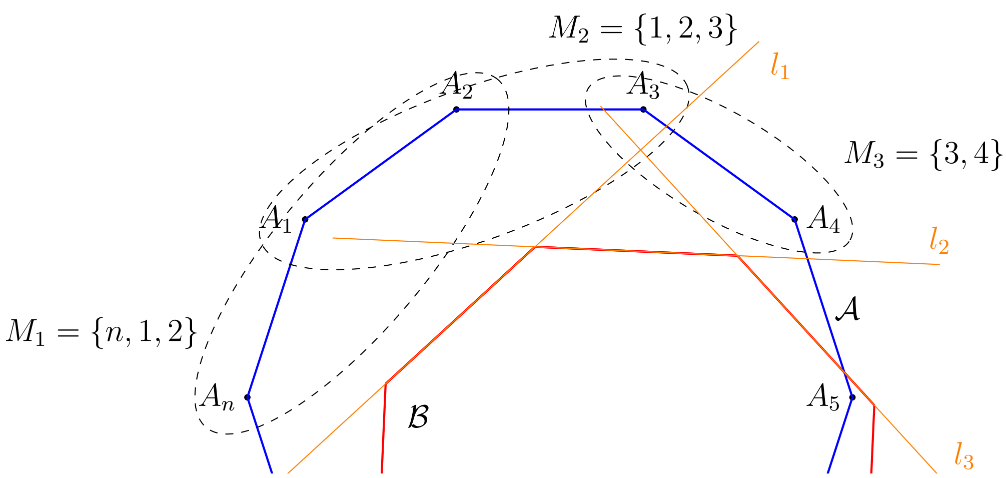
$$< \overrightarrow{O_AA_i}, \overrightarrow{b_i} >= \min_{j\in[n]} < \overrightarrow{O_AA_j}, \overrightarrow{b_i} > . \tag{1}$$



Chúng ta quan tâm đến sự thay đổi bài toán thêm nhiều dạng tổ hợp, với mục đích chúng ta giới thiệu các vấn đề sau đây. Nói rằng một tập hợp $I \subseteq [n]$ là *được kết nối* nếu một đoạn thẳng của tập hợp được nối tiếp trong thứ tự tuần hoàn (theo ngôn ngữ khác, nếu chúng ta nối i với $i+1 \pmod n$) bằng một cạnh, thì tập hợp con này được nối tiếp trong một dạng đồ thị thông thường). Rõ ràng, sự kết hợp với hai tập con kết nối được chia một đoạn thẳng được nối tiếp, cho nửa không gian $\mathcal{H}$ đặt chỉ số các đỉnh. Kế tiếp, với mỗi nửa không gian $\mathcal{H}$ nói rằng, $\mathcal{A}$ nằm trong $\mathcal{H}$ thành một tập hợp kết nối.
Để chấp nhận vấn đề, chúng ta kí hiệu

$$M = \{j \in [n] : A_j \notin \mathcal{B}\}, \qquad M_i = \{j \in [n] : A_j \notin \mathcal{H}_i\}.$$

Chúng ta cần chứng minh rằng $[n] \setminus M$ được kết nối, trang bị với M được kết nối. Trên phương diện khác, khi $\mathcal{B} = \cup_{i\in[n]}\mathcal{H}_i$, chúng ta có $M = \cap_{i\in[n]}M_i$, ở đây tập M_i đơn giản được đưa ra. Chúng ta sẽ sử dụng tính chất sau đây của tập hợp; điều đầu tiên được định nghĩa bởi M_i, thuộc các chú ý sau.



Tính chất. Mỗi tập M_i được nối tiếp.

Tính chất. Nếu M_i không rỗng, khi đó $i \in M_i$.

Chứng minh. Chúng ta có

$$j \in M_i \Leftrightarrow A_j \in \mathcal{H}_i \Leftrightarrow < \overrightarrow{B_iA_j}; \vec{b_i} >< 0 \Leftrightarrow < \overrightarrow{O_AA_j}; \vec{b_i} ><< \overrightarrow{O_AB_i}; \vec{b_i} > \quad (2)$$

Vế bên phải của bất đẳng thức không phụ thuộc vào j. Do đó, nếu có vài j nằm trong M_i, khi đó (1) đúng với i.

Ta định nghĩa tập hợp sau:

$$M' = \{i \in [n] : i \in M_i\} = \{i \in [n] : M_i \neq \not\angle\varnothing\}.$$

Tính chất. Tập M' là tập nối tiếp.

Chứng minh. Để chứng minh tính chất này, chứng ta sử dụng dòng chứng minh ở [2] để viết

$$i \in M' \Leftrightarrow A_i \in M_i \Leftrightarrow < \overrightarrow{B_iA_i}, \vec{b_i} >< 0 \Leftrightarrow < \overrightarrow{O_BO_A}, \vec{b_i} >< \overrightarrow{O_BB_i}, \vec{b_i} > + < \overrightarrow{A_iO_A}, \vec{b_i} > .$$

Vế bên phải gồm các đánh giá không phụ thuộc vào i, do phép quay đối xứng; kí hiệu giá trị hằng số của nó là ν. Do đó, $i \in M'$ nếu và chỉ nếu $< \overrightarrow{O_BO_A}, \vec{b_i} >< \nu$. Điều kiện này được trang bị đến ví dụ rằng B_i nằm trên một không gian (mở) bị chặn là đến O_BO_A; do đó, nó định nghĩa một tập kết nối.

Ngay bây giờ, chúng ta hoàn thành chứng minh. Khi $M' \supseteq M$, chúng ta có

$$M = \cup_{i\in[n]} M_i = M' \cup_{i\in[n]} M_i,$$

bởi vậy M có thể được bao gồm từ M' bằng thêm tất cả tập hợp M_i. Tất cả những tập hợp được nối tiếp, và mỗi tập không rỗng M_i bao gồm một đoạn thẳng của M' (tên, i). Như vậy, phần tử của chúng là được kết nối.

Bài 7 (G7, Bài do Kazakhstan đề xuất cho IMO 2017). Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi I_a, I_b, I_c và I_d lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DAB, ABC, BCD và CDA. Giả sử, tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (AI_bI_d) và (CI_bI_d) cắt nhau tại X, và tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (BI_aI_c) và (DI_aI_c) cắt nhau tại Y. Chứng minh $\angle XIY = 90°$.

Lời giải.

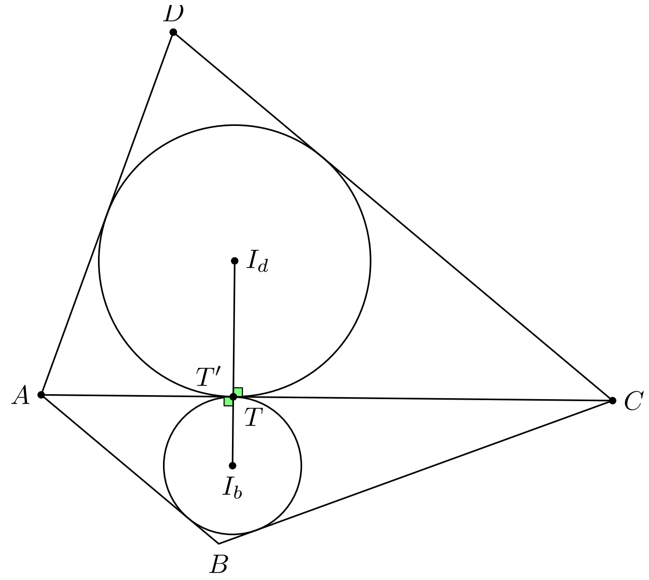
Kí hiệu ω_a, ω_b, ω_c và ω_d lần lượt là các đường tròn AI_bI_d, BI_aI_c, CI_bI_d, DI_aI_c với các tâm O_a, O_b, O_c, O_d và bán kính là r_a, r_b, r_c, r_d tương ứng.

Yêu cầu 1. Ta chứng minh $I_bI_d \perp AC$, $I_aI_c \perp BD$.

Chứng minh: Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ACD tiếp xúc với AC tại T và T' tương ứng. Ta có $AT = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$ trong tam giác ABC, $AT' = \dfrac{AD + AC - CD}{2}$ trong tam giác ACD và $AB - BC = AD - CD$ trong tứ giác $ABCD$. Do đó,

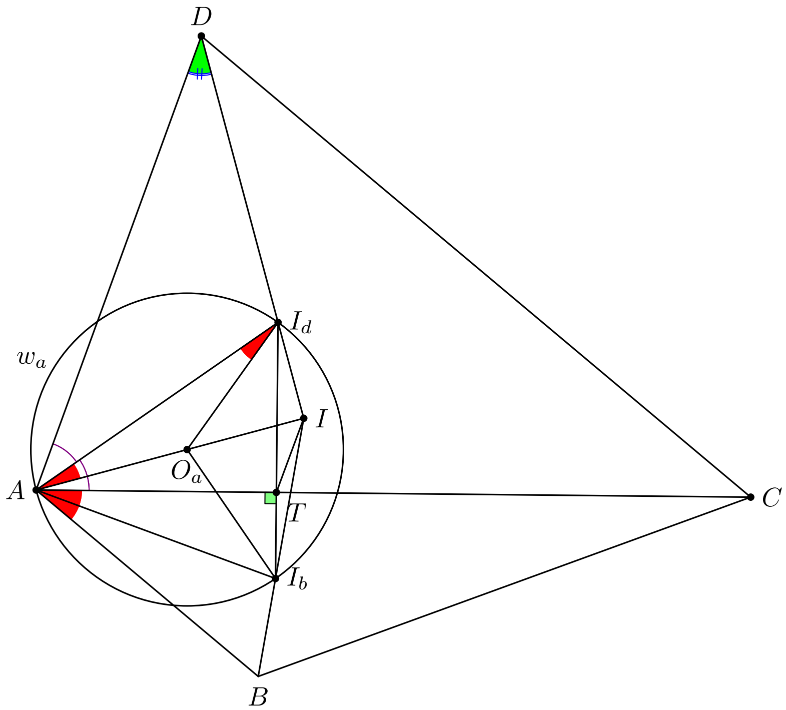
$$AT' = \frac{AD + AC - CD}{2} = \frac{AD + AC - CD}{2} = AT'$$

suy ra $T \equiv T'$ hay $I_bI_d \perp AC$. Tương tự, $I_aI_c \perp BD$.



Yêu cầu 2. Ta chứng minh O_a, O_b, O_c và O_d nằm trên AI, BI, CI và DI tương ứng.

Chứng minh: Do tính đối xứng, ta chỉ cần chứng minh cho điểm O_a.



Chú ý rằng, đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD có thể thu được từ đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ qua phép vị tự tâm B và D tương ứng với hệ số vị tự nhỏ hơn 1. Do đó, các điểm I_b và I_d thuộc đường thẳng BI và DI tương ứng.

Như đã biết, trong mọi tam giác đường cao và đường kính của đường tròn ngoại tiếp xuất phát từ cùng một đỉnh là đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc chứa đỉnh đó. Theo **Yêu cầu 1**, trong tam giác AI_dI_b đoạn thẳng AT là đường cao. Từ chân đường cao T nằm trên đoạn I_bI_d, tâm O_a của đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_dI_b nằm trong góc I_bAI_d suy ra rằng $\angle I_bAT = \angle O_aAI_d$. Các điểm I_b và I_d là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD, do đó AI_b và AI_d lần lượt là phân giác của các góc $\angle BAC$ và $\angle CAD$. Thế thì

$$\angle O_aAD = \angle O_aAI_d + \angle I_dAD = \angle I_bAT + \angle I_dAD = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAD$$

do đó, O_a thuộc phân giác góc $\angle BAD$, hay $O_a \in AI$.

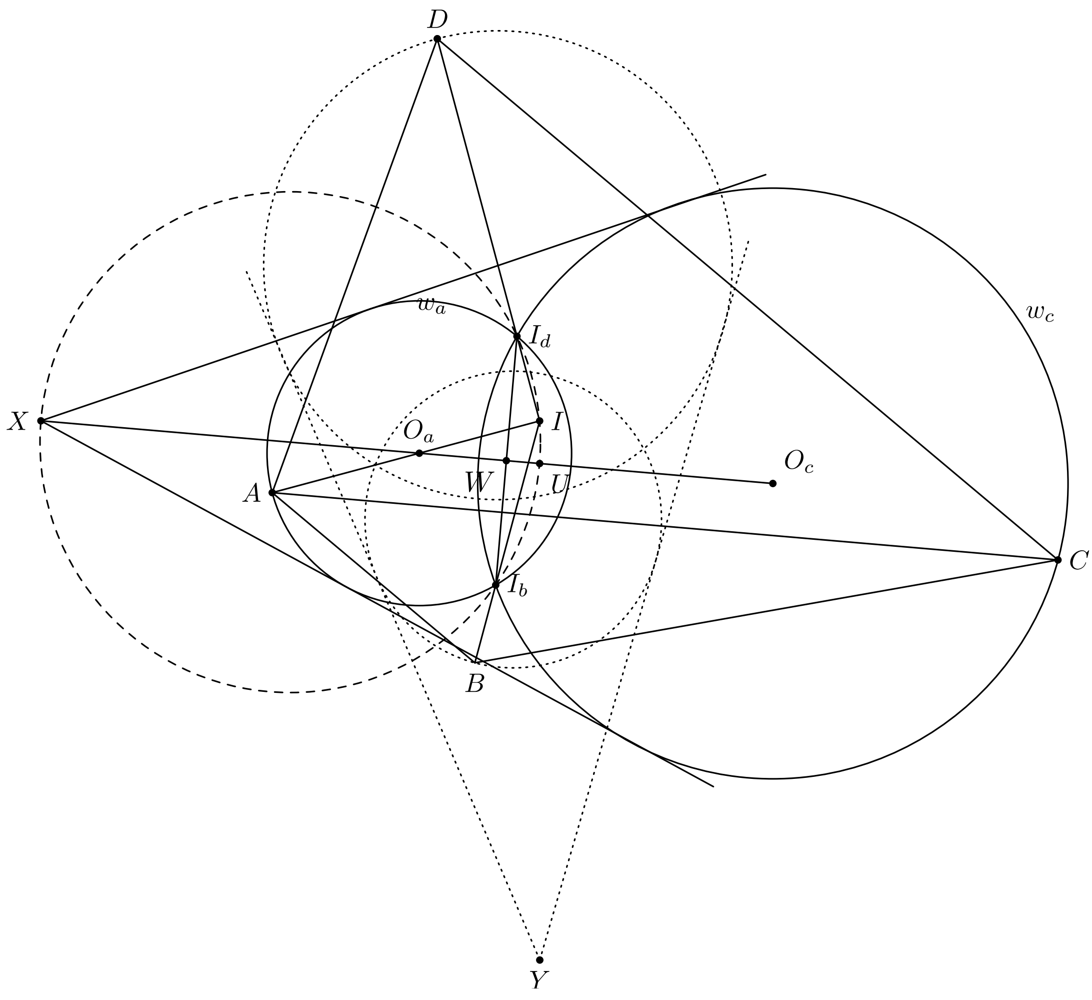
Ta thấy, điểm X là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn ω_a và ω_c. Gọi U là tâm vị tự trong của hai đường tròn đó. Các điểm O_a và O_c, X, U cùng nằm trên đường trung trực của đoạn I_bI_d. Từ đó suy ra $XO_c \parallel AC$.

Từ tính đối xứng của hai đường tròn ω_a, ω_c và từ $O_aI_b{=}O_aI_d{=}O_aA = r_a$; $O_cI_b{=}O_cI_d{=}O_cC = r_c$; $O_aO_c \parallel AC$ chúng ta thấy

$$\frac{O_aX}{O_cX} = \frac{O_aU}{O_cX} = \frac{O_cU}{O_cX} = \frac{r_a}{r_c} = \frac{O_aI_b}{O_cI_b} = \frac{O_aI_d}{O_cI_d} = \frac{O_aA}{O_cC} = \frac{O_aI}{O_cI}.$$

Các điểm X, U, I_b, I_d, I nằm trên đường tròn Apollonius của các điểm O_a, O_c với tỉ số $r_a : r_c$. Đường tròn Apollonius có XU là đường kính, và các đường thẳng IU, IX tương ứng là phân giác trong và ngoài của góc $\angle O_aIO_c = \angle AIC$. Hơn nữa, trong đường tròn Apollonius có đường kính UX là đường trung trực của I_bI_d, do đó IX và IU lần lượt là phân giác trong và ngoài của góc $\angle I_bII_d = \angle BID$.

Hoàn toàn tương tự cho các điểm B và D chúng ta cũng suy ra được IY là phân giác trong của góc $\angle AIC$ và là phân giác ngoài của góc BID. Do đó, $\angle XIY = 90°$



□