CHUYÊN ĐỀ

BÀI TOÁN TÌM ĐA THỨC

GIÁO VIÊN: ĐÀO XUÂN TIỀM, TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI

MỤC LỤC

A. MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Các bài toán về đa thức thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi toán và luôn được đánh giá là các bài toán khó. Các bài toán này thường yêu cầu nghiên cứu tính chất về các hệ số của một đa thức, tính chất về nghiệm của nó và được hỏi theo nhiều hình thức khác nhau.

Bài toán về tìm đa thức có vai trò rất quan trọng và xuất hiện nhiều trong kì thi học sinh giỏi. Khi tiếp cận với một bài toán tìm đa thức, học sinh thường lúng túng không biết chọn phương hướng như thế nào để tiếp cận. Hơn nữa, nói chung các bài toán về đa thức thường đòi hỏi vận dụng các kĩ năng biến đổi đại số tương đối phức tạp.

Chính vì vậy tác giả quyết định chọn đề tài ***"Bài toán tìm đa thức"*** , hy vọng hệ thống hóa lại các phương pháp giải tìm đa thức. Bên cạnh những phương pháp quen thuộc như: Phương pháp cân bằng bậc, đồng nhất hệ số; Phương pháp dựa vào nghiệm riêng; Phương pháp xét tính chia hết; Phương pháp sinh dãy nghiệm; ... chuyên đề này còn đề cấp " *Phương pháp sử dụng nguyên lý cực hạn*" là hướng mở để tiếp cận bài toán tìm đa thức.

2. MỤC ĐÍCH VÀ NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu các các phương pháp hay sử dụng để tìm đa thức cụ thể như: . Phương pháp sử dụng nguyên lý cực hạn; Phương pháp tìm nghiệm riêng; Phương pháp dựa vào tính chia hết của đa thức; Phương pháp sử dụng dãy nghiệm; Phương pháp so sánh bậc và cân bằng hệ số.

- Vận dụng các kĩ năng biến đổi, đánh giá và thực hiện các phép toán trên đa thức nhằm phát huy khả năng tư duy toán học cho học sinh.

B. NỘI DUNG

CHƯƠNG 1. LÝ THUYẾT CỞ BẢN VỀ ĐA THỨC

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1: Ta gọi đa thức bậc n biến x là một biểu thức có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Trong đó $a_i (i = \overline{0,n})$ là các số thực (hoặc phức) được gọi là hệ số

Nếu $a_i = 0, i = 1, 2, 3, ..., n$ và a_0 thì bậc của đa thức là không

Nếu $a_i = 0, i = 0, 1, 2, 3, ..., n$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi là đa thức không

(nói chung thì người ta không định nghĩa bậc của đa thức không)

Định nghĩa 2: Cho đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ được gọi là một nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(\alpha) = 0$.

Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}, k > 1$ sao cho $P(x) \vdots (x - \alpha)^k$ nhưng $P(x)$ không chia hết cho $(x - \alpha)^{k+1}$ thì α được gọi là nghiệm bội k của đa thức $P_n(x)$.

1.2 Các phép toán trên đa thức

Cho hai đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Ta định nghĩa các phép toán số học:

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$$

$$f(x) - g(x) = (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1) x + a_0 - b_0$$

$$f(x).g(x) = c_{2n} x^{2n} + c_{n-1} x^{2n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

trong đó $c_k = a_o b_k + a_1 b_{k-1} + a_k b_0$

1.3 Một số kết quả quan trọng

a) Mỗi đa thức bậc n đều c không quá n nghiệm thực

b) Đa thức có vô số nghiệm là đa thức hằng không

c) Đa thức $P(x)$ được gọi là chia hết cho đa thức $Q(x)$ (hay có thể viết $P(x) \vdots Q(x)$) khi và chỉ khi tồn tại đa thức $R(x)$ sao cho $P(x)=Q(x).R(x)$

d) Nếu $P(x)=P(x+a), a\neq 0$ thì $P(x)=C$.

e) Định lí Viète

Giả sử phương trình $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \quad a_n\neq 0 \quad (1)$ có n nghiệm $x_1, x_{2,\ldots,} x_n$ (kể cả nghiệm bội) thì

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=\dfrac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

CHƯƠNG 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

2.1. Phương pháp sử dụng nguyên lý cực hạn.

Một tập hợp hữu hạn các số thực luôn có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Một tập con bất kì của $\mathbb{N}$ luôn có phần tử nhỏ nhất.

✪ Bài toán 2.1.1.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P(x^2)=P(x^3+2x),\forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải:

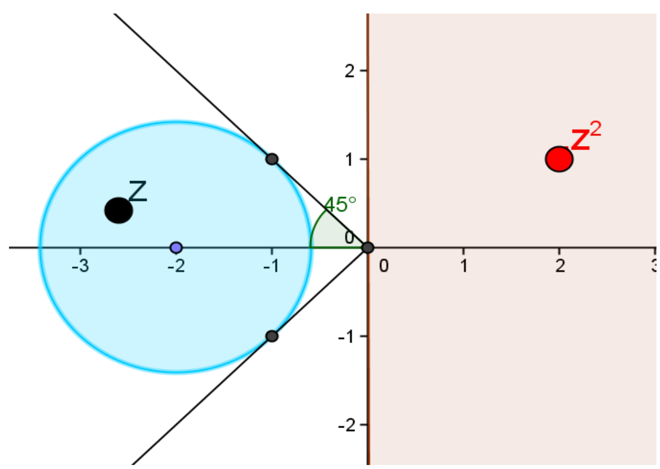
* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)>0$

Giả sử $x_1=0$ là nghiệm của $P(x)$ suy ra $P(x)=x^kQ(x),Q(0)\neq 0,k\in\mathbb{N}^*$ suy ra

$x^{2k}Q(x)Q(x^2)=(x^2+2)^kQ(x^3+2x)$ thay $x=0$ suy ra $Q(0)=0$ vô lý.

Nên $x_1\neq 0$ là nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$.



Giả sử $|x_1|$ có giá trị lớn nhất, đặt $x_1=t^2$

từ phương trình suy ra t^6+2t^2,t^3+2t

cũng là nghiệm, suy ra

$|t^2|\geq|t^6+2t^2|,|t^2|\geq|t^3+2t|$ suy ra

$1\geq|t^4+2|;|t|\geq|t^2+2|$

Từ $1\geq|t^4+2|\geq|t|^4-2$ suy ra $|t|\leq\sqrt[4]{3}<\sqrt{2}$

Vậy ta có $|t^2+2|<\sqrt{2}$

Đặt $z=t^2$ ta được $|z+2|<\sqrt{2}$ và $|z^2+2|\leq 1$ suy ra z nằm trong đường tròn tâm (-2 ;0) bán kính bằng $R=\sqrt{2}$ và z^2 nằm trong đường tròn tâm (-2 ;0) bán kính $R'=1$.Gọi $\varphi\in[0;2\pi]$ là một acgumen của z, do z nằm trong đường tròn tâm (-2;0) bán kính $R=\sqrt{2}$. suy ra $\varphi\in\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$ suy ra $2\varphi\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ là acgumen của z^2 điều này dẫn đến z^2 không nằm trong đường tròn tâm (-2;0) bán kính $R'=1$ điều này vô lý.

Vậy $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

✪ Bài toán 2.1.2.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn phương trình

$$P(2x)P\left(3x^4\right)=P\left(2x^5+8x\right), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)>0$

Giả sử $x_1=0$ là nghiệm của $P(x)$ suy ra $P(x)=x^kQ(x), Q(0)\neq 0, k\in\mathbb{N}^*$ suy ra $\left(6x^4\right)^k Q(2x)Q\left(3x^4\right)=\left(2x^4+8\right)^k Q\left(2x^5+8x\right)$ thay $x=0$ suy ra $Q(0)=0$ vô lý.

Nên $x_1\neq 0$ là nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$.

Giả sử $x_1=2t$ là nghiệm của $P(x)$ mà $|x_1|$ có giá trị lớn nhất suy ra $|x_1|\geq 3\Rightarrow |t|\geq \dfrac{3}{2}$ vì $x_1.x_2...x_n=\dfrac{a_0}{a_n}=3^n$. Do $2t$ là nghiệm nên $2t^5+8t$ cũng là nghiệm nên $\left|2t^5+8t\right|\leq |2t|\Rightarrow \left|2t^4+8\right|\leq 2\Rightarrow 2\geq 2\left|t^4\right|-8\geq \dfrac{17}{8}$ vô lý, suy ra $P(x)$ không có nghiệm phức nào suy ra $P(x)=C\neq 0$ mẫu thuẫn.

Vậy chỉ có $P(x)=0, P(x)=1$.

✪ Bài toán 2.1.3.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P\left(2x^2\right)=P\left(x^3+x\right), \forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x) > 0$

Giả sử $x_1 = 0$ là nghiệm của $P(x)$ suy ra $P(x) = x^k Q(x), Q(0) \neq 0, k \in \mathbb{N}^*$ suy ra

$\left(2x^2\right)^k Q(x) Q\left(2x^2\right) = \left(x^2+1\right)^k Q\left(x^3+x\right)$ thay $x = 0$ suy ra $Q(0) = 0$ vô lý.

Nên $x_1 \neq 0$ là nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$.

Giả sử x_1 là nghiệm của $P(x)$ mà $|x_1|$ có giá trị lớn nhất suy ra $|x_1| \geq 2$ vì

$x_1.x_2...x_n = \dfrac{a_0}{a_n} = 2^n$. Theo qui tắc sinh nghiệm ta có $x_1^3 + x_1$ cũng là nghiệm nên

$\left|x_1^3 + x_1\right| \leq |x_1| \Rightarrow \left|x_1^2 + 1\right| \leq 1 \Rightarrow 1 \geq \left|x_1^2\right| - 1 = |x_1|^2 - 1 \geq 4 - 1 = 3$ vô lý, suy ra $P(x)$ không có nghiệm phức nào suy ra $P(x) = C \neq 0$ mẫu thuẫn.

Vậy chỉ có $P(x) = 0, P(x) = 1.$

✪ Bài toán 2.1.4.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P\left(3x^2\right) = P\left(x^3+7x\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x) = 0$ tức $P(x) = C$ thay vào (1) ta được $C = 0$ hoặc $C = 1$, hay $P(x) = 0, P(x) = 1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x) > 0$

Giả sử $x_1 = 0$ là nghiệm của $P(x)$ suy ra $P(x) = x^k Q(x), Q(0) \neq 0, k \in \mathbb{N}^*$ suy ra

$\left(3x^2\right)^k Q(x) Q\left(3x^2\right) = \left(x^2+7\right)^k Q\left(x^3+7x\right)$ thay $x = 0$ suy ra $Q(0) = 0$ vô lý.

Nên $x_1 \neq 0$ là nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$.

Giả sử x_1 là nghiệm của $P(x)$ mà $|x_1|$ có giá trị lớn nhất suy ra $|x_1| \geq 3$ vì

$x_1.x_2...x_n = \dfrac{a_0}{a_n} = 3^n$. Do x_1 là nghiệm nên $x_1^3 + 7x_1$ cũng là nghiệm nên

$\left|x_1^3 + 7x_1\right| \leq |x_1| \Rightarrow \left|x_1^2 + 7\right| \leq 1 \Rightarrow 1 \geq \left|x_1^2\right| - 7 = |x_1|^2 - 7 \geq 9 - 7 = 2$ vô lý, suy ra $P(x)$ không có nghiệm phức nào suy ra $P(x) = C \neq 0$ mẫu thuẫn.

Vậy chỉ có $P(x) = 0, P(x) = 1.$

2.2. Phương pháp tìm nghiệm riêng

Trong mục này ta quan tâm đến bài toán tìm đa thức thỏa mãn phương trình $P\left(f(x)\right).P\left(g(x)\right)=P\left(h(x)\right)$. *Nếu phương trình đa thức có nghiệm riêng* $m(x)$ *khi đó ta có thể nghĩ đến cách đặt* $P(x)=m(x)+Q(x)$ *và chứng minh* $Q(x)\equiv 0$ *hoặc đặt* $P(x)=m(x).Q(x)$ *và chứng minh* $Q(x)\equiv C$

✪ Bài toán 2.2.1.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(x+1)=P\left(2x^2+8x+6\right),\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)=n\in\mathbb{N}^*$, tức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$.

Khi đó, so sánh hệ số của lũy thừa cao nhất của (1) ta có $a_n^2=a_n.2^n\Rightarrow a_n=2^n$ suy ra đặt $P(x)=(2x+3)^n+Q(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (2)$, với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực và $\deg Q(x)=m,\ 0\le m<n$ thay vào (1) ta có

$$\left[(2x+3)^n+Q(x)\right]\left[(2x+5)^n+Q(x+1)\right]=\left(2\left(2x^2+8x+6\right)+3\right)^n+Q\left(2x^2+8x+6\right)$$

$$\Rightarrow\left((2x+3)(2x+5)\right)^n+(2x+3)^nQ(x+1)+(2x+5)^nQ(x)+Q(x)Q(x+1)=\left((2x+3)(2x+5)\right)^n$$
$$+Q\left(2x^2+8x+6\right)$$
$$\Rightarrow(2x+3)^nQ(x+1)+(2x+5)^nQ(x)+Q(x)Q(x+1)=Q\left(2x^2+8x+6\right)\ (3)$$

Nếu $Q(x)$ khác đa thức 0 từ (3) so sánh bậc cao nhất hai vế ta có $n+m=2m\Rightarrow n=m$ vô lí, suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng 0. Suy ra $P(x)=(2x+3)^n,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=(2x+3)^n$.

Phân tích lời giải.

1. Điều thiếu tự nhiên nhất trong lời giải trên là đặt $P(x)=(2x+3)^n+Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$ vậy cơ sở nào để có thể đặt được như vậy?

2. Lời giải trên xuất phát từ tính chất nghiệm của phương trình đa thức sau: $P(f(x)).P(g(x))=P(h(x))$, trong đó $f(x),g(x),h(x)$ là các đa thức đa biết trước và $\deg f(x)+\deg g(x)=\deg h(x)$. Khi đó nghiệm của phương trình trên có hai tính chất quan trọng sau:

✪ Tính chất 1. Phương trình luôn có nghiệm là $P(x)=0,P(x)=1$.

✪ Tính chất 2. Nếu $P_0(x)$ là nghiệm thì $P_0^n(x)$ cũng là nghiệm.

✪ Tính chất 3. Nếu $\deg f(x)\neq\deg g(x)$ hoặc $\begin{cases}\deg f(x)=\deg g(x)\\ [f]+[g]\neq 0\end{cases}$. Khi đó với mỗi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một nghiệm bậc n. Trong đó $[f]$ là kí hiệu của hệ số bậc cao nhất của đa thức $f(x)$.

3. Từ đó dẫn đến ta sẽ đi tìm một nghiệm riêng $P_0(x)$ (thường nghiệm đa thức bậc thấp). Việc tìm ra nghiệm riêng $P_0(x)$ được tiến hành bởi phương pháp quen thuộc sau: Xét đa thức bậc nhất, giả sử như $P(x)=ax+b,a\neq 0$ khi đó ta có $(ax+b)(a(x+1)+b)=a(2x^2+8x+6)+b$, để tìm a,b ta có thể sử dụng phương pháp cân băng hệ số hai vế hoặc thay x bởi các giá trị cụ thể để lập ra hệ phương trình với ẩn a,b. Chẳng hạn cho $x=0,x=-1$ ta có $\begin{cases}b(a+b)=6a+b\ (1)\\ (-a+b)b=b\ (2)\end{cases}$ từ (2) nếu $b=0$ suy ra $a=0$ vô lý, do dó từ (2) ta có $a=b-1$ thay vào (1) ta có $b^2-4b+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ b=3\end{array}\right.$ nếu $b=1\Rightarrow a=0$ vô lý, vậy $b=3\Rightarrow a=2$. Vậy ta thấy $P(x)=2x+3$ là một nghiệm. Và dễ thấy nếu $P(x)=2x+3$ là nghiệm thì $P(x)=(2x+3)^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$ cũng là nghiệm, từ đó ta có hướng đặt $P(x)=\frac{a_n}{2^n}(2x+3)^n+Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và chỉ ra $Q(x)=0$.

✪ Bài toán 2.2.2.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P\left(x^2-4x\right)=P^2(x-6), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Phân tích:

Bằng cách phân tích ở trên ta nhận thấy phương trình trên nhận $P(x)=x+4$ là nghiệm, theo tính chất suy ra bài toán sẽ có nghiệm $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=(x+4)^n$.

Do đó, khi đa thức $\deg P(x)>0$ đặt $P(x)=(x+4)^n+Q(x), \forall x\in\mathbb{R}$ và công việc tiếp theo là thay vào (1) sau đó chỉ ra $Q(x)=0$. Sau đây là lời giải chi tiết.

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)=n\in\mathbb{N}^*$, tức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$.

Khi đó, so sánh hệ số của lũy thừa cao nhất của (1) ta có $a_n^2=a_n\Rightarrow a_n=1$ suy ra đặt $P(x)=(x+4)^n+Q(x), \forall x\in\mathbb{R}$ (2), với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực và $\deg Q(x)=m,$ $0\le m<n$ thay vào (1) ta có $\left[\left(x^2-4x+4\right)^n+Q\left(x^2-4x\right)\right]=\left[(x-2)^n+Q(x-6)\right]^2$

$$\Rightarrow (x-2)^{2n}+Q\left(x^2-4x\right)=(x-2)^{2n}+2(x-2)^nQ(x-6)+Q^2(x-6)$$
$$\Rightarrow Q\left(x^2-4x\right)=2(x-2)^nQ(x-6)+Q^2(x-6)\ (3)$$

Nếu $Q(x)$ khác đa thức 0 từ (3) so sánh bậc cao nhất hai vế ta có $2m=n+m\Rightarrow n=m$ vô lí, suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng 0. Suy ra $P(x)=(x+4)^n, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=(2x+3)^n$.

Tương tự ta có thể dễ dàng giải các bài tập tương tự

✪ Bài toán 2.2.3.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P\left(x^2\right)=P^2(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=x^n$

✪ Bài toán 2.2.4.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$P(x)P(2x^2)=P(2x^3+4x^2+2x+2), \forall x\in\mathbb{R}$

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=(x+2)^n$

✪ Bài toán 2.2.5.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$P(x-2).P(x+1)=P(x^2+x-3), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=(x+1)^n$.

✪ Bài toán 2.2.6.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P(x+1)=P(x^2+x), \forall x\in\mathbb{R}$

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=x^n$.

✪ Bài toán 2.2.7.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$P(x^2-y^2)=P(x+y).P(x-y), \forall x, y\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Cho $y=0$ ta qui về bài toán quen thuộc $P(x^2)=P^2(x)$

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=x^n$

✪ Bài toán 2.2.8.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(xy)=P(x).P(y), \forall x, y\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Cho $y=x$ ta qui về bài toán $P(x^2)=P^2(x)$

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=x^n$

Sau đây là một số bài toán mà nghiệm riêng là đa thức bậc 2.

✪ Bài toán 2.2.9.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P(x+1)=P(x^2+2),\forall x\in\mathbb{R}$.

Phân tích.

Xét đa thức bậc nhất, giả sử như $P(x)=ax+b, a\neq 0$ khi đó ta có

$(ax+b)(a(x+1)+b)=a(x^2+2)+b$, để tìm a,b ta có thể sử dụng phương pháp cân băng hệ số hai vế ta có $\begin{cases} a^2=a \\ a(a+b)+ab=0 \\ 2a+b=b(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ b^2=2 \end{cases}$ vô nghiệm. Vậy không có nghiệm riêng là đa thức bậc nhất.

Xét đa thức bậc hai , giả sử như $P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ khi đó ta có

$(ax^2+bx+c)(a(x+1)^2+b(x+1)+c)=a(x^2+2)^2+b(x^2+2)+c$ (1) so sánh hệ số của lũy thừa x^4 của (*) ta có $a^2=a\Rightarrow a=1$. Suy ra (1) trở thành

$(x^2+bx+c)(x^2+(b+2)x+1+b+c)=x^4+(b+4)x^2+4+2b+c$ (2) So sánh hệ số của lũy thừa x^3 ta có $b=-1$. Suy ra (2) trở thành $(x^2-x+c)(x^2+x+c)=x^4+3x^2+c+c$ (3) so sánh hệ số của x^2 và hệ số tự do ta được $c=2$. Vậy ta thấy $P(x)=x^2-x+2$ là một nghiệm. Và dễ thấy nếu $P(x)=x^2-x+2$ là nghiệm thì $P(x)=(x^2-x+2)^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$ cũng là nghiệm, từ đó ta có hướng chỉ ra bậc của $P(x)$ phải là số chẵn và đặt $P(x)=(x^2-x+2)^n+Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và chỉ ra $Q(x)=0$.

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)>0$

Chứng minh bậc của $P(x)$ không thể là số lẻ. Thật vậy, giả sử bậc của $P(x)$ là một số lẻ khi đó sẽ tồn tại x_1 sao cho $P(x_1)=0$ suy ra $P(x_1^2+2)=0$ hay $x_2=x_1^2+2$ cũng là nghiệm, ta thấy phương trình $x^2+2=x$ không có nghiệm thực, suy ra $x_2\neq x_1$ và hơn nữa $x_2 > x_1$. Xét dãy nghiệm (x_n) với x_1 là một nghiệm thực của $P(x)$ và $x_n = x_{n-1}^2 + 2, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ ta thấy $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < ...$ và chúng đều là nghiệm của $P(x)$ suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra $P(x) \equiv 0$ (vô lý).

Như vậy bậc của $P(x)$ là một số chẵn, suy ra $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_1x + a_0$ và so sánh hệ số của lũy thừa cao nhất ta có $a_{2n} = 1$, đặt $P(x) = (x^2 - x + 2)^n + Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực và $\deg Q(x) = m, 0 \le m < 2n$ thay vào phương trình ban đầu ta có $\left[(x^2 - x + 2)^n + Q(x)\right]\left[(x^2 + x + 2)^n + Q(x+1)\right] = (x^4 + 3x^2 + 4)^n + Q(x^2 + 2)$

$$\Rightarrow \left((x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)\right)^n + (x^2 - x + 2)^n Q(x+1) + (x^2 + x + 2)^n Q(x) + Q(x)Q(x+1)$$
$$= (x^4 + 3x^2 + 4)^n + Q(x^2 + 2)$$

suy ra $(x^2 - x + 2)^n Q(x+1) + (x^2 + x + 2)^n Q(x) + Q(x)Q(x+1) = Q(x^2 + 2)$ (1)

Nếu $Q(x)$ khác đa thức 0 từ (1) so sánh bậc cao nhất hai vế ta có $2n + m = 2m \Rightarrow 2n = m$ vô lí, suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng 0. Suy ra $P(x) = (x^2 - x + 2)^n, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = 0, P(x) = 1, P(x) = (x^2 - x + 2)^n$.

Nhận xét sau lời giải:

1. Ta thấy nghiệm riêng của bài toán trên là đa thức bậc 2. Khi đó, phép đặt $P(x) = (x^2 - x + 2)^n + Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là chưa được, do đó trước khi tiến hành đặt ta phải chứng minh được bậc của $P(x)$ là số chẵn.
2. Việc chứng minh bậc của $P(x)$ là số chẵn. thường được xử lí như lời giải trên, tức ta giả sử bậc lẻ, suy ra có nghiệm thực, suy ra có vô số nghiệm thực, suy ra vô lý.

✪ Bài toán 2.2.10.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P(x-1) = P(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)>0$

Chứng minh bậc của $P(x)$ không thể là số lẻ. Thật vậy giả sử $P(x)$ bậc lẻ thì suy ra $P(x)$ có nghiệm α suy $\alpha^2, (\alpha+1)^2$ cũng là nghiệm.

Xét dãy (x_n) với $x_n = x_{n-1}^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

- Nếu $\alpha \in (-1;1)\setminus\{0\}$ thì chọn $x_1=\alpha^2 \Rightarrow x_1 \in (0;1) \Rightarrow (x_n)$ giảm, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra vô lý.

- Nếu $\alpha \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ thì chọn $x_1=\alpha^2 \Rightarrow x_1>1 \Rightarrow (x_n)$ tăng, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra vô lý.

- Nếu $\alpha \in \{0;\pm 1\}$ là nghiệm suy ra 2 là nghiệm, khi đó chọn $x_1=2$ suy ra dãy (x_n) tăng, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra vô lý.

Như vậy bậc của $P(x)$ là một số chẵn, suy ra $P(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ và so sánh hệ số của lũy thừa cao nhất ta có $a_{2n}=1$, đặt $P(x)=\left(x^2+x+1\right)^n+Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$

.

với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực và $\deg Q(x)=m, 0 \leq m < 2n$ thay vào phương trình ban đầu ta có $\left[\left(x^2+x+1\right)^n+Q(x)\right]\left[\left(x^2-x+1\right)^n+Q(x-1)\right]=\left(x^4+x^2+1\right)^n+Q\left(x^2\right)$

$$\Rightarrow \left(x^4+x^2+1\right)^n+\left(x^2+x+1\right)^n Q(x-1)+\left(x^2-x+1\right)^n Q(x-1)+Q(x)Q(x-1)=\left(x^4+x^2+1\right)^n+Q\left(x^2\right)$$

suy ra $\Rightarrow \left(x^2+x+1\right)^n Q(x-1)+\left(x^2-x+1\right)^n Q(x-1)+Q(x)Q(x-1)=Q\left(x^2\right)$

Nếu $Q(x)$ khác đa thức 0 từ (1) so sánh bậc cao nhất hai vế ta có

$2n+m=2m \Rightarrow 2n=m$ vô lí, suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng 0. Suy ra

$P(x)=\left(x^2+x+1\right)^n, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=\left(x^2+x+1\right)^n$..

Tương tự ta có thể dễ dàng giải các bài tập tương tự

✪ <u>Bài toán 2.2.11.</u>

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình $P(x)P(x+1)=P\left(x^2\right), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Đáp số: $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=\left(x^2-x\right)^n$

✪ <u>Bài toán 2.2.12.</u>

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$P\left(x^3+x-1\right).P\left(x^3+x\right)=P\left(x^6+2x^4-2x^3+x^2-2x+3\right), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Đáp số: Đặt $t=x^3+x-1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in\mathbb{R}$

$(1)\Rightarrow P(t).P(t+1)=P\left(t^2+2\right), \forall t\in\mathbb{R}$.

2.3. Phương pháp dựa vào tính chia hết của đa thức

Từ điều kiện đề bài ta chỉ ra được $P(x)\vdots m(x)$ khi đó đặt $P(x)=m(x).Q(x)$ để chuyển về bài toán tìm đa thức $Q(x)$ đơn giản hơn.

✪ <u>Bài toán 2.3.1.</u> (Hy Lạp 2014)

Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$\left(x^2-6x+8\right)P(x)=\left(x^2+2x\right)P(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

<u>Lời giải:</u>

Từ (1) ta có $(x-2)(x-4)P(x)=x(x+2)P(x-2)$

Suy ra $P(x)\vdots x(x+2)$

Từ $P(x-2)\vdots(x-2)(x-4)\Rightarrow P(x)\vdots x(x-2)$

Suy ra đặt $P(x)=x\left(x^2-4\right)Q(x)$

Suy ra $(x-2)(x-4)x\left(x^2-4\right)Q(x)=x(x+2)(x-2)(x-4)xQ(x-2)$

Suy ra $(x-2)Q(x)=xQ(x-2)$

Suy ra $Q(x)\vdots x$

Đặt $Q(x)=xR(x)\Rightarrow (x-2)xR(x)=x(x-2)R(x-2)\Rightarrow R(x)=R(x-2)\Rightarrow R(x)=C$

Suy ra $P(x)=Cx^2\left(x^2-4\right)$.

<u>✪ Bài toán 2.3.2.</u> [VMO 2003, bảng B]

Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn đẳng thức

$\left(x^3+3x^2+3x+2\right)P(x-1)=\left(x^3-3x^2+3x-2\right)P(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

<u>Lời giải 1:</u>

Từ $(1)\Rightarrow (x+2)\left(x^2+x+1\right)P(x-1)=(x-2)\left(x^2-x+1\right)P(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (2) suy ra $\left.\begin{array}{l} P(x)\vdots(x+2)\left(x^2+x+1\right) \\ P(x-1)\vdots(x-2)\left(x^2-x+1\right)\end{array}\right\}\Rightarrow P(x)\vdots(x+2)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Nên ta đặt $P(x)=(x+2)(x-1)\left(x^2+x+1\right)Q(x)$ thay vào (1) ta được

$(x+2)\left(x^2+x+1\right)(x+1)(x-2)\left(x^2-x+1\right)Q(x-1)=(x-2)\left(x^2-x+1\right)(x+2)(x-1)\left(x^2+x+1\right)Q(x)$
suy ra $(x+1)Q(x-1)=(x-1)Q(x)$ (3)

Từ (3) suy ra $\left.\begin{array}{l} Q(x)\vdots(x+1) \\ Q(x-1)\vdots(x-1)\end{array}\right\}\Rightarrow Q(x)\vdots x(x+1)$

Nên ta đặt $Q(x)=x(x+1)R(x)$ suy ra $R(x-1)=R(x)\Rightarrow R(x)=C$

Suy ra $P(x)=C(x-1)x(x+1)(x+2)\left(x^2+x+1\right)$

<u>Lời giải 2:</u>

Từ $(1)\Rightarrow (x+2)\left(x^2+x+1\right)P(x-1)=(x-2)\left(x^2-x+1\right)P(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (2) ta nhận thấy $P(x)$ nhận các nghiệm sau: $-2;1;-1;0$ $(*)$ nên đặt

$P(x)=x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (3) và $Q(x)\in\mathbb{R}[x]$. Thay (3) vào (2) ta được

$\left(x^2+x+1\right)Q(x-1)=\left(x^2-x+1\right)Q(x)$, (4). Đặt $Q(x)=\left(x^2+x+1\right)R(x)$ suy ra $R(x)=C$

$\Rightarrow P(x)=Cx(x-1)(x+1)(x+2)\left(x^2+x+1\right)$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta suy ra $\Rightarrow P(x)=Cx(x-1)(x+1)(x+2)\left(x^2+x+1\right),\forall x\in\mathbb{R}$ với $C-const$

Thử lại thấy thoả mãn. $P(x) = Cx(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}$ với $C - const$.

✪ Bài toán 2.3.3.

Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn đẳng thức

$(x-1)^2 P(x) = (x-3)^2 P(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

Do $P(x) \vdots (x-3)^2$ Suy ra đặt $P(x) = (x-3)^2 Q(x)$

Suy ra $(x-1)^2 (x-3)^2 Q(x) = (x-3)^2 (x-1)^2 Q(x+2)$

Suy ra $Q(x) = Q(x+2) \Rightarrow Q(x) = C$

Suy ra $P(x) = c(x-3)^2$.

✪ Bài toán 2.3.4.

Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn đẳng thức

$(x-1)^{2015} P(x) = (x-3)^{2015} P(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

Do $P(x) \vdots (x-3)^{2015}$ Suy ra đặt $P(x) = (x-3)^{2015} Q(x)$

Suy ra $(x-1)^{2015} (x-3)^{2015} Q(x) = (x-3)^{2015} (x-1)^{2015} Q(x+2)$

Suy ra $Q(x) = Q(x+2) \Rightarrow Q(x) = C$

Suy ra $P(x) = c(x-3)^{2015}$.

2.4. Phương pháp sử dụng dãy nghiệm

Nếu α là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $f(\alpha)$ cũng là nghiệm của đa thức, khi đó ta xây dựng dãy $(x_n): \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ nếu dãy này đơn điệu thì $P(x)$ có vô số nghiệm nên $P(x) \equiv 0$.

✪ Bài toán 2.4.1.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$P\left((x+1)^{2015}\right)=\left(P(x)+3x+1\right)^{2015}-(x+1)^{2015}$ và $P(0)=0$ (1)

Lời giải:

Dễ thấy $P(x)$ không phải là đa thức hằng.

Đặt $Q(x)=P(x)+x$ thay vào (1) ta có $Q\left((x+1)^{2015}\right)=\left(Q(x)+2x+1\right)^{2015}$

Xét dãy số $(x_n):\begin{cases} x_0=Q(0)=0 \\ x_{n+1}=(1+x_n)^{2015} \end{cases}$ ta thấy (x_n) là dãy số tăng

Ta có $Q(x_1)=Q\left((1+x_0)^{2015}\right)=\left(Q(x_0)+2x_0+1\right)^{2015}=1=x_1^2$

Sử dụng phương pháp quy nạp ta chứng mính $Q(x_n)=x_n^2$. Thật vậy: với $n=1$ luôn đúng, giả sử đã có $Q(x_n)=x_n^2$ suy ra

$$Q(x_{n+1})=Q\left((x_n+1)^{2015}\right)=\left(Q(x_n)+2x_n+1\right)^{2015}=\left(x_n^2+2x_n+1\right)^{2015}=\left[(x_n+1)^{2015}\right]^2=x_{n+1}^2$$

Suy ra $Q(x_n)=x_n^2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ mà (x_n) là dãy tăng nên suy ra $Q(x)=x^2 \Rightarrow P(x)=x^2-x$.

✪ Bài toán 2.4.2.

Cho hai đa thức $P(x),Q(x)$ đều có nghiệm thực và thỏa mãn

$P\left(1+x+Q^2(x)\right)=Q\left(1+x+P^2(x)\right)$. Chứng minh rằng $P(x)\equiv Q(x)$.

Lời giải 2:

Ta chứng minh tồn tại α để $P(\alpha)=Q(\alpha)$. Gọi a,b lần lượt là nghiệm của $P(x),Q(x)$ ta có $P^2(a)-Q^2(a)<0<P^2(b)-Q^2(b)$ mà $P^2(x)-Q^2(x)$ là hàm liên tục nên tồn tại c sao cho $P^2(c)=Q^2(c)$. Đặt $\alpha=1+c+Q^2(c)=1+c+P^2(c)$ suy ra $P(\alpha)=Q(\alpha)$. Xét dãy $(x_n):\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_{n+1}=1+x_n+Q^2(x_n) \end{cases}$ là dãy tăng và các phần tử của dãy đều là nghiệm của $P(x)-Q(x)$. Suy ra $P(x)\equiv Q(x)$. Suy ra điều phải chứng minh.

✪ Bài toán 2.4.3.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1),\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

* Trường hợp 1. Xét $\deg P(x)=0$ tức $P(x)=C$ thay vào (1) ta được $C=0$ hoặc $C=1$, hay $P(x)=0, P(x)=1$ là hai đa thức cần tìm.

* Trường hợp 2. Xét $\deg P(x)>0$

Chứng minh bậc của $P(x)$ không thể là số lẻ. Thật vậy, giả sử bậc của $P(x)$ là một số lẻ khi đó sẽ tồn tại nghiệm thực x_1 sao cho $P(x_1)=0$ suy ra $P(x_1^2+x_1+1)=0.$ hay $x_2=x_1^2+x_1+1$ cũng là nghiệm, ta thấy phương trình $x^2+x+1=x$ không có nghiệm thực, suy ra $x_2\neq x_1$ và hơn nữa $x_2>x_1$. Xét dãy nghiệm (x_n) với x_1 là một nghiệm thực của $P(x)$ và $x_n=x_{n-1}^2+2,\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ ta thấy $x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n<...$ và chúng đều là nghiệm của $P(x)$ suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra $P(x)\equiv 0$ (vô lý).

Như vậy bậc của $P(x)$ là một số chẵn, suy ra $P(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+...+a_1x+a_0$ và so sánh hệ số của lũy thừa cao nhất ta có $a_{2n}=1$, đặt $P(x)=(x^2+1)^n+Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$.
với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực và $\deg Q(x)=m, 0\leq m<2n$ thay vào phương trình ban đầu ta có $\left[(x^2+1)^n+Q(x)\right]\left[(x^2+2x+2)^n+Q(x+1)\right]=\left((x^2+x+1)^2+1\right)^n+Q(x^2+x+1)$

$$\Rightarrow (x^4+2x^3+3x^2+2x+2)^n+(x^2+1)^nQ(x+1)+(x^2+2x+2)^nQ(x)+Q(x)Q(x+1)$$
$$=(x^4+2x^3+3x^2+2x+2)^n+Q(x^2+x+1)$$

suy ra $\Rightarrow (x^2+1)^nQ(x+1)+(x^2+2x+2)^nQ(x)+Q(x)Q(x+1)=Q(x^2+x+1)$ (2)

Nếu $Q(x)$ khác đa thức 0 từ (2) so sánh bậc cao nhất hai vế ta có

$2n+m=2m\Rightarrow 2n=m$ vô lí, suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng 0. Suy ra

$P(x)=(x^2+1)^n,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x)=0, P(x)=1, P(x)=\left(x^2+1\right)^n$.

2.5. Phương pháp so sánh bậc và cân bằng hệ số

Phương pháp này dựa trên định nghĩa về hai đa thức bằng nhau chẳng hạn $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$ *khi và chỉ khi* $n=m$ *và* $a_i=b_i, \forall i=\overline{0,n}$. *Từ đó ta xác định được bậc và các hệ số.*

✪ Bài toán 2.5.1.[Trại hè Hùng Vương, 2015]

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$P(x)P(x+2015)=P\left(P(x)+2015x\right), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$ hoặc $P(x)\equiv 1$.

Xét $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0, n\geq 1$. Bằng cách so sánh bậc cao nhất của hai vế ta được $2n=n^2\Rightarrow n=2$. Do đó, $P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Đồng nhất hệ số của x^4 ta có $a^2=a^3\Rightarrow a=1$ suy ra $P(x)=x^2+bx+c$ thay vào (1) và cho $x=0$ suy ra $c=0$ hoặc $b=-2016$.

Nếu $c=0\Rightarrow P(x)=x^2+bx$ thay vào (1) ta có $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-2016 \end{array}\right.$ suy ra $P(x)=x^2$ hoặc $P(x)=x^2-2016x$. Thử lại chỉ có $P(x)=x^2$ thỏa mãn.

Nếu $b=-2016\Rightarrow P(x)=x^2-2016x+c$ thay vào (1) ta có $c=-4013$ suy ra $P(x)=x^2-2016x-4031$ thử lại không thỏa mãn

Vậy $P(x)\equiv 0$ hoặc $P(x)\equiv 1$ hoặc $P(x)=x^2$.

✪ Bài toán 2.5.2.[Slovenia MO 2014]

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$P\left(P(x)\right)=\left(x^2+x+1\right)P(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải:

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$

Xét $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0, n\geq 1$. Bằng cách so sánh bậc hai vế ta được $n^2=n+2\Rightarrow n=2$. Do đó, $P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Sử dụng đồng nhất hệ số ta được $a=1, b=1, c=0$ suy ra $P(x)=x^2+x$.

Vậy $P(x)=x^2+x$ hoặc $P(x)\equiv 0$.

✪ <u>Bài toán 2.5.3.</u>

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên biết $16P(x^2)=P^2(2x), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

<u>Lời giải:</u>

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$ hoặc $P(x)\equiv 16$.

Xét $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0, n\geq 1$ và $a_0, a_1, ..., a_n\in\mathbb{Z}$. So sánh hệ số x^{2n} hai vế ta có $a_n=\dfrac{16}{4^n}$. Do $a_n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=1,2$.

Với $n=1\Rightarrow P(x)=4x+b$ thay vào (1) và so sánh hệ số hai vế ta có $b=0$ suy ra $P(x)=4x$.

Với $n=2\Rightarrow P(x)=x^2+bx+c$ thay vào (1) và so sánh hệ số hai vế ta có $b=c=0$ suy ra $P(x)=x^2$.

Vậy có bốn đa thức thỏa mãn yêu cầu là: $P(x)\equiv 0$, $P(x)\equiv 16$, $P(x)=4x$, $P(x)=x^2$.

✪ <u>Bài toán 2.5.4.</u> [THTT-4/2008]

Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn đẳng thức

$P(P(x)+x)=P(x).P(x+1), \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

<u>Lời giải:</u>

TH1: $\deg P(x)=0$. Khi đó

$$\Rightarrow P(x)=C, \forall x\in\mathbb{R} \text{ thay vào } (1) \text{ ta có } C=C^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} C=0\Rightarrow P(x)=0, \forall x\in\mathbb{R} \\ C=1\Rightarrow P(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

TH2: $\deg P(x)=n\in\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$. Khi đó

$\Rightarrow P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$ thay vào (1) ta được

$$P\left(\left(a_nx^n+...+a_1x+a_0\right)+x\right)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right)\left[a_n\left(x+1\right)^n+...+a_1x+a_0\right]\ (2)$$

- So sánh luỹ thừa cao nhất hai vế của (2) ta được $n^2=2n\Rightarrow n=2$
- So sánh hệ số ứng với luỹ thừa cao nhất hai vế của (2) ta được

  $a_2^3=a_2^2\Rightarrow a_2=1$
- $\Rightarrow P(x)=x^2+a_1x+a_0,\forall x\in\mathbb{R}(3)$
- Thay (3) ta thấy luôn đúng

KL: $\left[\begin{array}{l}P(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\ P(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}\\ P(x)=x^2+bx+c,\forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$

Nhận xét:

1. Sử dụng thuần túy so sách bậc, so sánh hệ số của đa thức
2. Bài toán có thể mở rộng thành $P\left(P(x)+ax\right)=P(bx+c).P(dx+e)$
3. $\deg P\left(P(x)\right)=n^2,\deg\left[P(x).P(x+a)\right]=2n$

$P\left(P(x)+x^2\right)=P(x).P(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$ (1), khi đó tách riêng $n>2$ và $n=2,n=1$

<u>✪ Bài toán 2.5.5.</u>

Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$\begin{cases}P(2)=12\\ P\left(x^2\right)=x^2\left(x^2+1\right)P(x),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $\deg P(x)=n$. So sánh bậc của *x* trong hai vế của (1) ta được $2n=n+4\Rightarrow n=4$.

Từ (1) suy ra $P(x)\vdots x(x+1)\Rightarrow P\left(x^2\right)\vdots x^3$ và khi cho $x=1$ suy ra $P(1)=2P(1)\Rightarrow P(1)=0$ suy ra $P(x)=Cx^2(x+1)(x-1)$, do $P(12)=12\Leftrightarrow C=1$. Vậy $P(x)=x^4-x^2$.

✪ Bài toán 2.5.6.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $18P(x)-8x-16=P'(x)P''(x)$ (1)

Lời giải:

Nếu $\deg P(x)=0$ thấy không thỏa mãn

Nếu $\deg P(x)=1\Rightarrow P(x)=ax+b\Rightarrow P'(x)=a,P''(x)=0$ thay vào (1) ta có

$18ax+18b-8x-16=0\Leftrightarrow(18a-8)x+18b-16=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{9}\\ b=\dfrac{8}{9}\end{cases}$ suy ra $P(x)=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{8}{9}$

Nếu $\deg P(x)=n\geq 2$ khi đó so sánh lũy thừa cao nhất hai vế

$n=(n-1)(n-2)\Leftrightarrow n^2-4n+3=0\Leftrightarrow n=3$

Đặt $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$ khi đó so sánh hai đa thức bằng nhau ta có

$a=b=c=d=1$ suy ra $P(x)=x^3+x^2+x+1$.

Vậy: $P(x)=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{8}{9},P(x)=x^3+x^2+x+1$.

✪ Bài toán 2.5.7.

Xác định đa thức với hệ số thực $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$P\left(x^{2015}+y^{2015}\right)=P^{2015}(x)+P^{2015}(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

➢ Xét trường hợp $P(x)$ là đa thức hằng: Khi đó, giả sử $P(x)=C,\forall x\in\mathbb{R}$

Từ $(1)\Rightarrow C=2.C^{2015}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C=0\\ C=\dfrac{1}{\sqrt[2014]{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}P(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\ P(x)=\dfrac{1}{\sqrt[2014]{2}},\forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$

Thử lại thấy thoả mãn.

➢ Xét trường hợp $P(x)$ không là đa thức hằng: Khi đó, giả sử

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*,a_n\neq 0$

Ở (1) lần lượt ta thay y bởi x; $y=0$ ta được $\begin{cases} P\left(2x^{2015}\right)=2P^{2015}(x), \forall x\in\mathbb{R} \ (2) \\ P\left(x^{2015}\right)=P^{2015}(x)+P^{2015}(0), \forall x\in\mathbb{R} \ (3) \end{cases}$

Do $VT(2)$ là đa thức bậc $2015n$, hệ số bậc cao nhất là $a_n.2^n$ và $VP(2)$ là đa thức bậc $2015n$, hệ số cao nhất là $2.a_n^{2015} \Rightarrow a_n.2^n=2.a_n^{2015}$ (4)

Do $VT(3)$ là đa thức bậc $2015n$, hệ số bậc cao nhất là a_n và $VP(3)$ là đa thức bậc $2015n$, hệ số cao nhất là $a_n^{2015} \Rightarrow a_n=a_n^{2015}$ (5)

Từ $(5) \Rightarrow a_n=1 \overset{(4)}{\Rightarrow} n=1 \Rightarrow P(x)=x+a_0, \forall x\in\mathbb{R}$ (6) thay (6) vào (1) ta được

$x^{2015}+y^{2015}+a_0=\left(x+a_0\right)^{2015}+\left(y+a_0\right)^{2015}, \forall x,y\in\mathbb{R}$ (7)

Ở (7) ta cho $x=y=0 \Rightarrow a_0=2.a_0^{2015} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_0=0 \\ a_0=\dfrac{1}{\sqrt[2014]{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P(x)=x, \forall x\in\mathbb{R} \\ P(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt[2014]{2}}, \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

Thử lại thấy $P(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ thoả mãn, $P(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt[2014]{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$ không thoả mãn.

KL: Có ba đa thức thoả mãn là: $P(x)=0, P(x)=\dfrac{1}{\sqrt[2014]{2}} \& P(x)=x$

✪ Bài toán 2.5.8.

Xác định đa thức với hệ số thực $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$P\left(x^2+y^2\right)=P^2(x)+P^2(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

➢ Xét trường hợp $P(x)$ là đa thức hằng: Khi đó, giả sử $P(x)=C, \forall x\in\mathbb{R}$

Từ $(1) \Rightarrow C=2.C^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C=0 \\ C=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P(x)=0, \forall x\in\mathbb{R} \\ P(x)=\dfrac{1}{2}, \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

Thử lại thấy thoả mãn.

➢ Xét trường hợp $P(x)$ không là đa thức hằng: Khi đó, giả sử

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, \forall x\in\mathbb{R}$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*, a_n\neq 0$

Ở (1) lần lượt ta thay y bởi x; $y=0$ ta được $\begin{cases} P\left(2x^2\right)=2P^2\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}\ (2) \\ P\left(x^2\right)=P^2\left(x\right)+P^2\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}\ (3) \end{cases}$

Do $VT(2)$ là đa thức bậc $2n$, hệ số bậc cao nhất là $a_n.2^n$ và $VP(2)$ là đa thức bậc $2006n$, hệ số cao nhất là $2.a_n^2 \Rightarrow a_n.2^n=2.a_n^2\ (4)$

Do $VT(3)$ là đa thức bậc $2n$, hệ số bậc cao nhất là a_n và $VP(3)$ là đa thức bậc $2n$, hệ số cao nhất là $a_n^2 \Rightarrow a_n=a_n^2\ (5)$

Từ $(5)\Rightarrow a_n=1\overset{(4)}{\Rightarrow} n=1\Rightarrow P\left(x\right)=x+a_0,\forall x\in\mathbb{R}\ (6)$ thay (6) vào (1) ta được

$x^2+y^2+a_0=\left(x+a_0\right)^2+\left(y+a_0\right)^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (7)$

$\Rightarrow a_0=2\left(x+y\right)a_0+2a_0^2,\forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow a_0=0\Rightarrow P\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$

Thử lại thấy $P\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ thoả mãn.

KL: Có ba đa thức thoả mãn là: $P\left(x\right)=0, P\left(x\right)=\frac{1}{2}\ \&\ P\left(x\right)=x$

C. KẾT LUẬN

Chuyên đề đã đề cấp khá đầy đủ về phương pháp giải bài toán tìm đa thức, trong đó đã đưa ra được những cách giải mới và kèm thêm những phân tích làm rõ hơn cách giải. Qua đó giúp học sinh tiếp cận và hình thành phương pháp giải quyết một lớp các bài toán tìm đa thức, tăng thêm tính say mê và tích cực tìm tòi, sáng tạo ở các em. Vì kiến thức và thời gian nghiên cứu còn hạn chế nên chuyên đề chắc hẳn còn tồn tại những thiếu sót.

Tôi mong đón nhận sự trao đổi, góp ý của Quý Thầy Cô để chuyên đề ngày càng hoàn thiện và sâu sắc hơn nữa. Tôi xin chân thành cảm ơn!

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên), *Tài liệu chuyên toán Giải tích 12*, NXB Giáo dục, 2012.

[2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc đa thức và áp dụng,* NXB Giáo dục, 2008.

[3] Văn Phú Quốc – Huỳnh Công Thái, *Tinh lọc các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi luyện thi Olympic toán 11*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2013.

[4] Toán học tuyển trẻ, NXB Giáo dục.

[5] Các đề thi trong các kì dành cho học sinh giỏi trên toàn quốc, khu vực và quốc tế.

[6] Chuyên đề đa thức của thầy Hạ Vũ Anh, chuyên Vĩnh Phúc.

[7] Chuyên đề đa thức một biến của thầy Nguyễn Tất Thu, chuyên Lương Thế Vinh

[8] Polynomial Equations, Dusan Djukic, The IMO Compendium