SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ CEVA VÀ MENELAUS TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

Phần 1. Đặt vấn đề

Các bài toán Hình học phẳng là một phần quan trọng trong các chuyên đề toán học và đồng thời nó cũng là một mảng khó trong chương trình toán THPT chuyên. Chính vì thế trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán quốc tế và khu vực, những bài toán Hình học phẳng cũng hay được đề cập và thường được xem là bài toán khó của kì thi. Trong các dạng toán liên quan đến Hình học phẳng thì bài toán đồng quy, thẳng hàng vừa được coi là bài toán quen và lạ, vừa dễ vừa khó. Bởi bài toán đồng quy, thẳng hàng đã được làm quen từ khi các em bắt đầu học Hình học cho đến chúng ta cảm thấy rất quen thuộc với Hình hoc nó vẫn hiện hữu. Nó lại là bài toán có tần suất xuất hiện nhiều nhất trong tất cả các kì thi HSG các cấp với rất nhiều hình thái khác nhau, mức độ khác nhau thậm chí là rất khó.

Các em học sinh bậc Trung học phổ thông thường gặp một số khó khăn khi tiếp cận các dạng toán liên quan đến bài toán đồng quy thẳng hàng nói riêng và bài toán Hình học phẳng nói chung bởi không biết phải bắt đầu từ đâu và khó khăn khi định hướng vẽ hình phụ. Cái khó của các em chính là không nắm được tường tận các phương pháp giải quyết từ đó dẫn đến khó khăn trong khâu định hướng. Để hiểu và vận dụng tốt một số dạng toán cơ bản và vận dụng kiến thức Hình học phẳng vào giải toán đồng quy thẳng hàng thì thông thường học sinh phải có kiến thức nền tảng Hình học tương đối đầy đủ và chắc chắn trên tất cả các lĩnh vực của nó.

Trong số rất nhiều các phương pháp để giải quyết bài toán đồng quy, thẳng hàng tác giả lựa chọn các phương pháp “Sử dụng định lý Ceva và Menelaus” để giải quyết lớp bài toán trên. Đây là phương pháp khá cổ điển và đặc trưng cho lớp bài toán này.

Phần 2 ĐỊNH LÝ CEVA VÀ MENELAUS

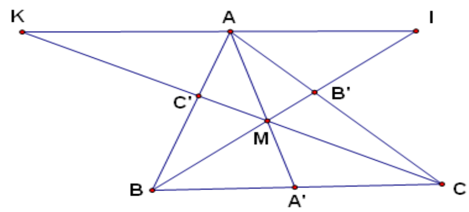
TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

1 Lý thuyết

1.1. Định lí Ceva: Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ hay $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1$.

Chứng minh:

AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi: $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$. (1)



($\Rightarrow$) Cho AA', BB', CC' đồng quy ta chứng minh (1)

Giả sử BB', CC' cắt đường thẳng qua A song song với BC lần lượt tại I và K.

Áp dụng định lí Thales có: $\frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{AI};\frac{C'A}{C'B}=\frac{AK}{BC}$.

Hơn nữa ta có: $\frac{AI}{A'B}=\frac{AM}{MA'}=\frac{AK}{A'C}\Rightarrow\frac{A'B}{A'C}=\frac{AI}{AK}$

Vậy ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AI}{AK}.\frac{BC}{AI}.\frac{AK}{BC}=1$.

($\Leftarrow$) Giả sử ta có hệ thức (1), ta cần chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.

Gọi P là giao điểm của AA' và BB', D là giao điểm của CP và AB. Khi đó áp dụng phần trên ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{DA}{DB}=1$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{C'A}{C'B}=\frac{DA}{DB}\Rightarrow C'\equiv D$ (Do C' và D cùng thuộc cạnh AB)

Vậy AA', BB', CC' đồng quy tại P.

Bộ ba đường thẳng AA’, BB’, CC’ đồng quy như trên được gọi là bộ ba đường thẳng

Ceva và các đoạn thẳng AA’, BB’và CC’ được gọi là bộ ba đoạn thẳng Ceva.

Nhận xét:

Trong chứng minh phần thuận của đình lý, có thể dùng các tỷ số diện tích như sau : $\frac{AG}{GB}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=.\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}.\frac{S_{COA}}{S_{BOC}}.\frac{S_{AOB}}{S_{COA}}=1$

- Các đoạn thẳng AE, BF, CG đươc gọi là các đường Ceva của tam giác
- Khi các điểm E, F, G có thể nằm tùy ý trên các đường thẳng chứa cạnh thì định lý Ceva mở được phát biểu như sau: Cho các điểm D, E, F tương ứng nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các đương thẳng AD, BE, CF đồng quy nếu và chỉ nếu: $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{BF}}=-1$.

1.2. Định lí Ceva dạng lượng giác (Ceva sin)

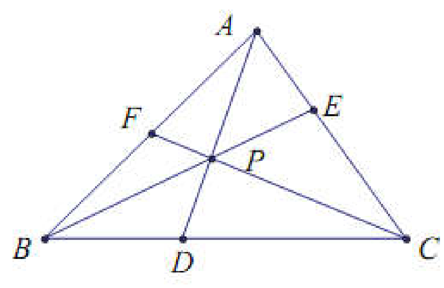
Cho tam giác ABC. D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng các mệnh đề sau là tương đương:

a) AD, BE, CF đồng quy tại một điểm.

b) $\frac{\sin\widehat{ABE}}{\sin\widehat{EBC}}.\frac{\sin\widehat{BCF}}{\sin\widehat{FCA}}.\frac{\sin\widehat{CAD}}{\sin\widehat{DAB}}=1$.

c) $\frac{AE}{EC}.\frac{CD}{DB}.\frac{BF}{FA}=1$.

Chứng minh:



Chúng ta sẽ chứng minh rằng a) dẫn đến b), b) dẫn đến c), và c) dẫn đến a).

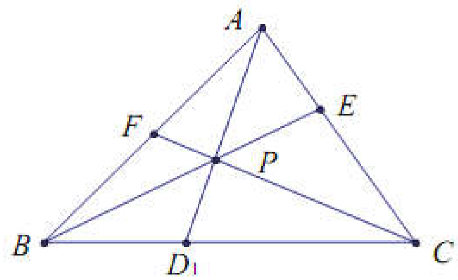
Giả sử a) đúng. Gọi P là giao điểm của AD, BE, CF.

Theo định lý hàm số sin trong tam giác APB ta có: $\dfrac{\sin\widehat{ABE}}{\sin\widehat{DAB}}=\dfrac{\sin\widehat{ABP}}{\sin\widehat{BAP}}=\dfrac{AP}{BP}$. (1)

Tương tự, ta cũng có: $\dfrac{\sin\widehat{BCF}}{\sin\widehat{EBC}}=\dfrac{BP}{CP}$;(2); $\dfrac{\sin\widehat{CAD}}{\sin\widehat{FCA}}=\dfrac{CP}{AP}$.(3)

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta được b).

Giả sử b) đúng.



Theo định lý hàm số sin trong tam giác ABD và tam giác ACD ta có:

$\dfrac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{BAD}}=\dfrac{AB}{DB};\dfrac{\sin\widehat{CAD}}{\sin\widehat{ADC}}=\dfrac{CD}{CA}.$

Do đó: $\dfrac{\sin\widehat{CAD}}{\sin\widehat{BAD}}=\dfrac{AB}{CA}.\dfrac{CD}{DB}.\left(\widehat{BDA}+\widehat{ADC}=180^0\right)$ (4)

Tương tự, ta cũng có: $\dfrac{\sin\widehat{BCF}}{\sin\widehat{FCA}}=\dfrac{CA}{BC}.\dfrac{BF}{FA}$. (5); $\dfrac{\sin\widehat{ABE}}{\sin\widehat{EBC}}=\dfrac{BC}{AB}.\dfrac{AE}{EC}$. (6)

Nhân từng vế của (4), (5), (6) ta được c).

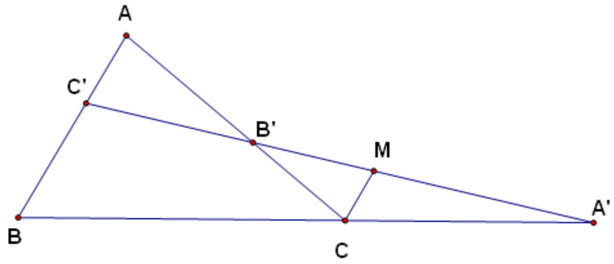
Giả sử c) đúng, ta gọi $P=CF\cap BE, D_1=AP\cap BC$.

Theo a) và b) ta có: $\dfrac{AE}{EC}.\dfrac{CD_1}{D_1B}.\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{AE}{EC}.\dfrac{CD}{DB}.\dfrac{BF}{FA}=1$ hay: $\dfrac{CD_1}{D_1B}=\dfrac{CD}{DB}$.

Do đó: $D\equiv D_1$.

1.3 Định lí Menelaus: Cho tam giác ABC và các điểm A’, B’, C’ trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho: hoặc cả ba điểm A’, B’, C’ đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm trên nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác ABC. Điều kiện cần và đủ để A’, B’, C’ thẳng hàng là $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ hay $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1$.

Chứng minh :



A’, B’, C’ thẳng hàng là $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1.$ (1)

($\Rightarrow$) Cho A’, B’, C’ thẳng hàng ta chứng minh (1)

Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt A’C’ tại M.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{A'B}{A'C}=\frac{A'C'}{A'M},\frac{B'C}{B'A}=\frac{B'M}{B'C'}.$

Mặt khác ta có $\frac{CM}{C'A}=\frac{B'M}{B'C'}$ và $\frac{CM}{C'B}=\frac{A'M}{A'C'}\Rightarrow\frac{C'A}{C'B}=\frac{A'M.B'C'}{A'C'.B'M}.$

Do đó ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{A'C'}{A'M}.\frac{B'M}{B'C,}.\left(\frac{A'M}{A'C'}.\frac{B'C'}{B'M}\right)=1.$

($\Leftarrow$) Cho các điểm A’, B’, C’ thoả mãn (*) và (1), ta chứng minh A’, B’, C’ thẳng hàng.

Giả sử B’, C’ nằm trên hai cạnh của tam giác và A’ thuộc phần kéo dài của cạnh còn lại. Gọi D là giao điểm của A’C’ và AC.

Khi đó, theo chứng minh trên ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{DC}{DA}.\frac{C'A}{C'B}=1.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{DC}{DA}=\frac{B'C}{B'A}\Rightarrow D\equiv B'$ (vì đều thuộc cạnh AC)

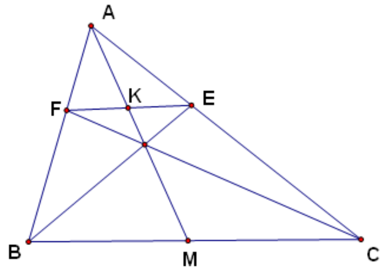
Vậy A’, B’, C’ thẳng hàng.

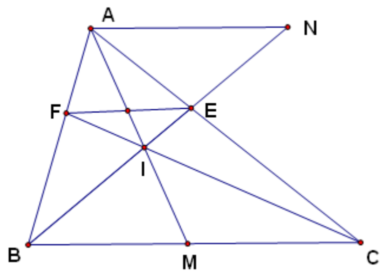
Trong trường hợp 3 điểm A’,B’,C’ cùng thuộc phần kéo dài của các cạnh chứng minh tương tự

2 Bài tập minh họa

Bài 1. Cho tam giác ABC lấy E, F, M thứ tự trên cạnh AC, AB, BC sao cho EF song song BC, MB = MC. Chứng minh rằng CF, BE, AM đồng quy

Chứng minh :





Cách 1: (Chứng minh đồng quy)

Gọi K là giao điểm của AM và EF.

Theo định lí Thales ta có: $\frac{AF}{BF}=\frac{AK}{KM};\frac{CE}{AE}=\frac{KM}{AK};\frac{BM}{CM}=1\Rightarrow\frac{AF}{BF}.\frac{BM}{CM}.\frac{CE}{AE}=1$.

Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ABC ta có CF, BE, AM đồng quy.

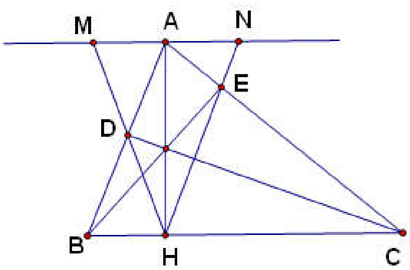
Cách 2: (Chứng minh thẳng hàng)

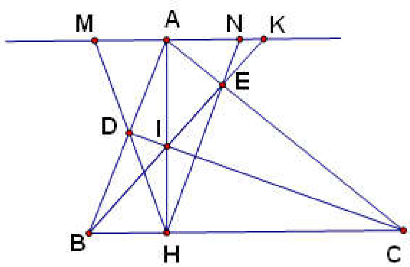
Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt BE tại N, AM cắt BE tại I. Ta có: $\frac{AF}{BF}=\frac{AN}{BC};\frac{BC}{MC}=2;\frac{MI}{AI}=\frac{BM}{AN}\Rightarrow\frac{AF}{BF}.\frac{BM}{CM}.\frac{MI}{AI}=1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABM thì F, I, C thẳng hàng. Từ đó suy ra CF, BE, AM đồng quy tại I.

Bài 2. Cho tam giác ABC đường cao AH. Lấy D, E theo thứ tự trên AB, AC sao cho AH là phân giác góc $\widehat{DHE}$. Chứng minh rằng AH, BE, CD đồng quy.

Chứng minh :





Cách 1: (Chứng minh đồng quy) Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt HD, HE tại M và N. Vì HA là phân giác góc $\widehat{A}$, HA là đường cao nên AM = AN.

Ta lại có $\frac{AD}{BD}=\frac{MA}{BH};\frac{CE}{AE}=\frac{CH}{AN}\Rightarrow\frac{AD}{BD}.\frac{BH}{CH}.\frac{CE}{AE}=\frac{MA}{BH}.\frac{BH}{CH}.\frac{CH}{AN}=1$.

Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ABC ta có AH, BE, CD đồng quy.

Cách 2: (Chứng minh thẳng hàng) Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt HD, HE, BE lần lượt tại M, N, K. Gọi AH cắt BE tại I. Ta có:

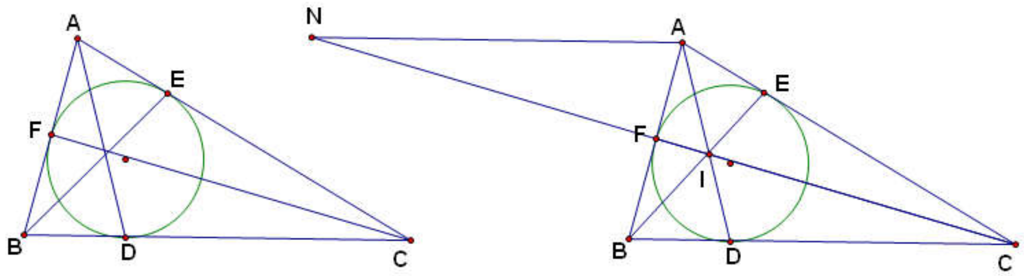
$\frac{AD}{BD}=\frac{MA}{BH}=\frac{AN}{BH};\frac{HI}{AI}=\frac{BH}{AK}\Rightarrow\frac{AD}{BD}.\frac{BC}{CH}.\frac{HI}{AI}=\frac{AN}{BH}.\frac{BC}{CH}.\frac{BH}{AK}=\frac{AE}{CE}.\frac{CE}{AE}=1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABH thì D, I, C thẳng hàng.

Từ đó suy ra AH, BE, CD đồng quy tại I.

Bài 3. Cho đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh AD, BE, CF đồng quy tại một điểm. (***điểm Gergonne*** của tam giác ABC)

Chứng minh:



Cách 1: (Chứng minh đồng quy)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau AF = AE; BF = BD; CE = CD,

suy ra $\frac{AF}{BF}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}=\frac{AE.BD.CE}{BD.CE.AE}=1$.

Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ABC ta có AD, BE, CF đồng quy.

Cách 2: (Chứng minh thẳng hàng)

Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt CF tại N, AD cắt CF tại I. Ta có:

$\frac{AE}{CE}.\frac{CB}{DB}.\frac{DI}{AI}=\frac{AF}{CD}.\frac{CB}{BF}.\frac{CD}{AN}=\frac{AF}{BF}.\frac{CB}{AN}=\frac{AN}{CB}.\frac{CB}{AN}=1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ACD thì B, I, E thẳng hàng. Từ đó suy ra AD, BE, CF đồng quy tại I.

Bài 4 (VMO 2011) Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm P di động trên tiếp tuyến tại B của (O) sao cho P không trùng với B. Đường thẳng PA cắt (O) tại điểm thứ hai C. Gọi D là điểm đối xứng với C qua O. Đường thẳng PD cắt (O) tại điểm thứ hai E.

1) Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BC và PO cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là M.

2) Hãy xác định vị trí của điểm P sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo bán kính của đường tròn (O). ((O) kí hiệu đường tròn tâm O).

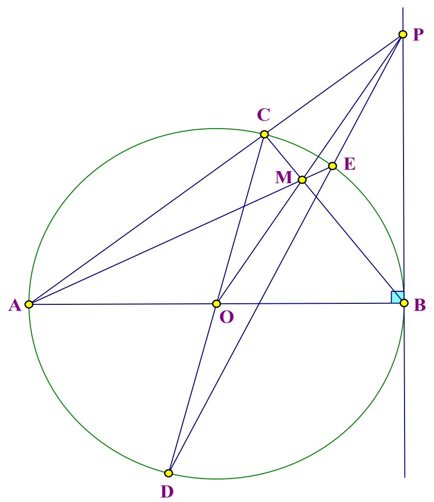
Giải:

Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AE và BP.

Ta chứng minh $\widehat{ACE} = 90^0 + \widehat{BCE} = 90^0 + \widehat{FAB} = \widehat{EFP} \Rightarrow \widehat{ECP} + \widehat{EFP} = 180^0$ do đó tứ giác CEFP nội tiếp

Từ đó suy ra $\widehat{CEP} = \widehat{CFP} = 90^0$ do đó CF // AB, suy ra $\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FB}}$

Khi đó ta có: $\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}.\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.\frac{\overline{FB}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -1$. Theo định lý Ceva ta có đpcm



2) Đặt BP = x và kí hiệu R là bán kính của (O). Xét tam giác vuông ABP, ta có

$PA=\sqrt{PB^2+AB^2}=\sqrt{x^2+4R^2}\Rightarrow PC=\frac{PB^2}{PA}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4R^2}};\ AC=PA-PC=\frac{4R^2}{\sqrt{x^2+4R^2}}$

Vì CF // AB (cmt) nên

$\frac{MC}{MB}=\frac{CF}{AB}=\frac{PC}{PA}\Rightarrow\frac{BC}{MB}=\frac{PC}{PA}+1=\frac{PC+PA}{PA}\Rightarrow BM=\frac{PA.BC}{PC+PA}=\frac{PB.AB}{PC+PA}=\frac{Rx\sqrt{x^2+4R^2}}{x^2+2R^2}$

Do đó $S_{AMB}=\frac{1}{2}AB.BM.\sin\widehat{ABM}=\frac{1}{2}.2R.\frac{Rx\sqrt{x^2+4R^2}}{x^2+2R^2}.\frac{AC}{2R}=\frac{2R^3x}{x^2+2R^2}$

Suy ra $S_{AMB}\le\frac{2R^3x}{2\sqrt{2}xR^2}=\frac{R^2}{\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=R\sqrt{2}$

Bài 5 (IMO 2012). Cho tam giác ABC và (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam

giác ABC. (J) tiếp xúc với BC,CA,AB tại M,L,K. $LM\cap JB=F, KM\cap JC=G.$ Gọi

AF và AG cắt BC tại S và T. Chứng minh rằng M là trung điểm của $ST.$

Giải:

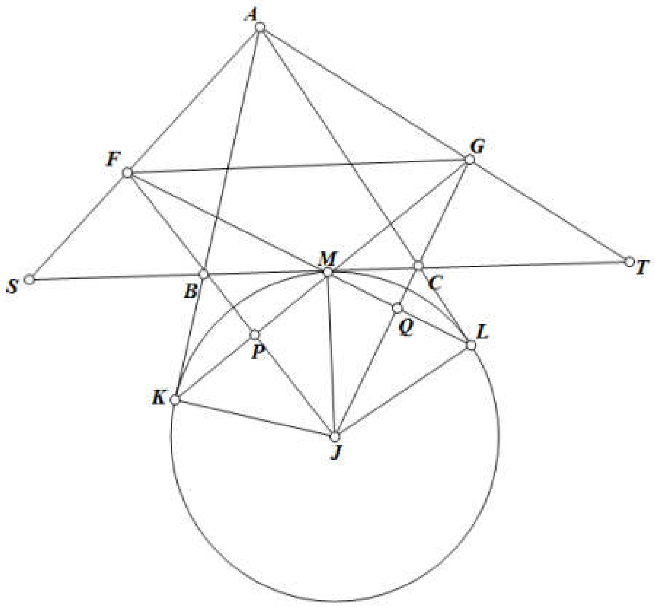
Gọi $JB\cap MK=P, JC\cap ML=Q$

Ta có $\widehat{BPM}=\widehat{MQC}=90^0$ do đó tứ giác FPQC nội tiếp suy ra

$\widehat{FGM}=\widehat{MQP}=\widehat{MJP}=\widehat{MKB}$

Chú ý rằng BK = BM nên $\widehat{BKM}=\widehat{BMK}$

Do đó $\widehat{FGM}=\widehat{GMC}$ nên ta thu được $FG//BC$ hay $FG//ST$



Áp dụng định lý Menelaus cho cát tuyến LMF của tam giác ACS ta có

$$\frac{LA}{LC}.\frac{MC}{MS}.\frac{FS}{FA}=1$$

Áp dụng định lý Menelaus cho cát tuyến KMG của tam giác ABT ta có

$$\frac{KA}{KB}.\frac{MB}{MT}.\frac{GT}{GA}=1$$

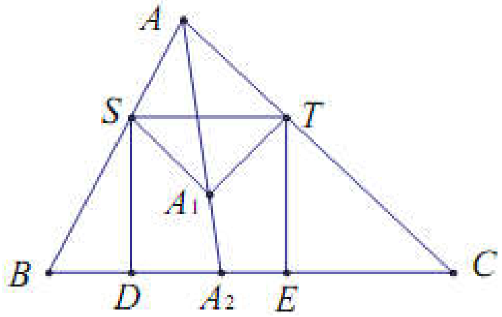
Từ hai hệ thức trên ta có

$$MT = MS\left(do\, KA = MB, LC = CM, KA = KL = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)\right)$$

Và do $FG//ST$ nên $\frac{GA}{GT}=\frac{FA}{FS}(Thales)$. Từ đó suy ra MT = MS

Bài 6 [IMO Shortlist] Cho điểm A_1 là tâm của hình vuông nội tiếp tam giác nhọn ABC có hai đỉnh nằm trên cạnh BC. Các điểm B_1, C_1 cũng lần lượt là tâm của các hình vuông nội tiếp tam giác ABC với một cạnh nằm trên AC và AB. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Lời giải:



Gọi A_2 là giao điểm của AA_1 và BC. B_2 và C_2 được xác định tương tự.

Theo định lý hàm số sin, ta có: $\frac{SA_1}{AA_1}=\frac{\sin\widehat{SAA_1}}{\sin\widehat{A_1SA}}$ hay $\frac{SA_1}{AA_1}=\frac{\sin\widehat{BAA_2}}{\sin\left(45^0+\widehat{B}\right)}$

Tương tự: $\frac{TA_1}{AA_1}=\frac{\sin\widehat{CAA_2}}{\sin\left(45^0+\widehat{C}\right)}$ hay $\frac{AA_1}{TA_1}=\frac{\sin\left(45^0+\widehat{C}\right)}{\sin\widehat{CAA_2}}$

Do đó, ta được: $\frac{\sin\widehat{BAA_2}}{\sin\widehat{CAA_2}}.\frac{\sin\left(45^0+\widehat{C}\right)}{\sin\left(45^0+\widehat{B}\right)}=\frac{AA_1}{TA_1}.\frac{SA_1}{AA_1}=1.$ (1)

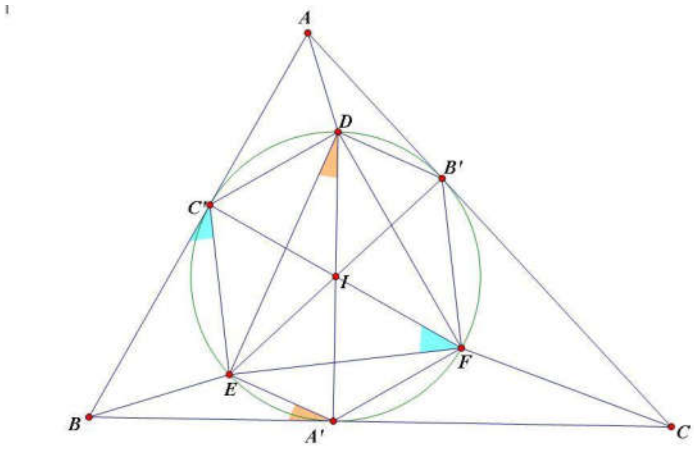
Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng được:

$\frac{\sin\widehat{BCC_2}}{\sin\widehat{ACA_2}}.\frac{\sin\left(45^0+\widehat{B}\right)}{\sin\left(45^0+\widehat{A}\right)}=1.$ (2) $\quad\frac{\sin\widehat{ABB_2}}{\sin\widehat{CBB_2}}.\frac{\sin\left(45^0+\widehat{A}\right)}{\sin\left(45^0+\widehat{C}\right)}=1.$ (3)

Nhân từng vế của (1), (2), (3) kết hợp định lý Ceva ta được điều cần chứng minh.

Bài 7 (Thái Bình TST 2014). Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Các tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là A', B', C'. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với A', B', C' qua I. Chứng minh AD, BE, CF đồng quy.

<u>**Lời giải:**</u>



Theo định lí hàm sin trong tam giác BC’E, BEA’:

$$\frac{C'E}{\sin\widehat{C'BE}}=\frac{BE}{\sin\widehat{BC'E}},\frac{A'E}{\sin\widehat{A'BE}}=\frac{BE}{\sin\widehat{BA'E}}\Rightarrow\frac{\sin\widehat{C'BE}}{\sin\widehat{A'BE}}=\frac{C'E}{A'E}.\frac{\sin\widehat{BC'E}}{\sin\widehat{BA'E}}$$

Hoàn toàn tương tự thì : $\frac{\sin\widehat{A'CF}}{\sin\widehat{B'CF}}=\frac{A'F}{B'F}.\frac{\sin\widehat{A'DF}}{\sin\widehat{B'EF}},\frac{\sin\widehat{B'AD}}{\sin\widehat{C'AD}}=\frac{B'D}{C'D}.\frac{\sin\widehat{B'ED}}{\sin\widehat{C'FD}}$

Do đó : $\frac{\sin\widehat{A'CF}}{\sin\widehat{B'CF}}.\frac{\sin\widehat{B'AD}}{\sin\widehat{C'AD}}.\frac{\sin\widehat{C'BE}}{\sin\widehat{A'BE}}=\frac{A'F}{B'F}.\frac{B'D}{C'D}.\frac{C'E}{A'E}.\frac{\sin\widehat{A'DF}}{\sin\widehat{B'EF}}.\frac{\sin\widehat{B'ED}}{\sin\widehat{C'FD}}.\frac{\sin\widehat{BC'E}}{\sin\widehat{BA'E}}$

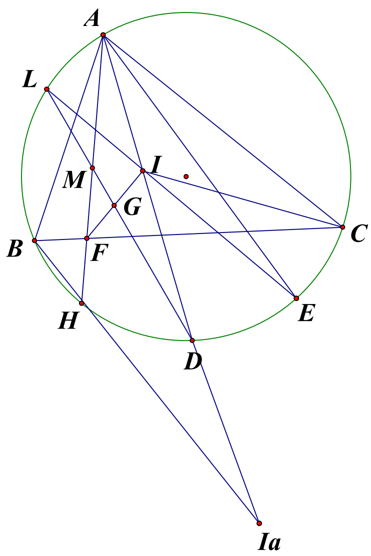
Dễ thấy C'E = B'F, C'D = A'F, B'D = A'E và theo định lí Ceva Sin trong tam giác DEF với DA', EB', FC' đồng quy tại I: $\frac{\sin\widehat{A'DF}}{\sin\widehat{B'EF}}.\frac{\sin\widehat{B'ED}}{\sin\widehat{C'FD}}.\frac{\sin\widehat{BC'E}}{\sin\widehat{BA'E}}=1$

Suy ra $\frac{\sin\widehat{A'CF}}{\sin\widehat{B'CF}}.\frac{\sin\widehat{B'AD}}{\sin\widehat{C'AD}}.\frac{\sin\widehat{C'BE}}{\sin\widehat{A'BE}}=1$. Theo định lí Ceva sin ta có AD, BE, CF đồng quy.

Bài 8 (IMO Shortlist 2010, G4) Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*T*). *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*. *AI* cắt (T) lần hai tại *D*. Gọi E thuộc cung BDC, *F* thuộc đoạn BC sao cho $\widehat{BAF}=\widehat{CAE}$. Gọi *G* là trung điểm của *IF*. Chứng minh rằng *EI* và *DG* cắt nhau trên (*T*).

Nhận xét: *Nếu ta gọi L là giao điểm của EI và (ABC), M là giao điểm của LD và AF thì điều phải chứng minh sẽ tương đương với chứng minh D, G, M thẳng hàng. Do đó, hãy thử nghĩ đến áp dụng Menelaus cho tam giác AFI.*

Lời giải



Gọi L là giao điểm của EI và (ABC), $\{M\} = LD \cap AF$, $\{G'\} = LD \cap FI$.

Đặt $AI = m$, $AD = n$, $AB = c$, $AC = b$. Khi đó $AI_a = 2n - m$.

Ta có $AB.AC = AI.AI_a \Leftrightarrow bc = m(2n - m) \Leftrightarrow bc - mn = mn - n^2$.

Ta có

$\Delta AND \sim \Delta AIE \Rightarrow AN.AE = AD.AI = mn.$

$\Delta ABF \sim \Delta AEC \Rightarrow AF.AE = AB.AC = bc$

Từ đó suy ra $AE(AF - AN) = bc - mn \Leftrightarrow AE.NG = bc - mn$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AIF với cát tuyến $DG'N$ ta có

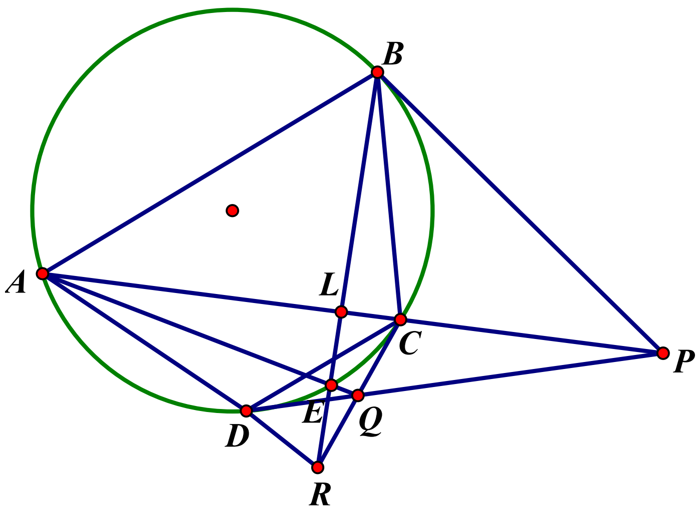
$$1 = \frac{G'I}{G'F}.\frac{NF}{NA}.\frac{DA}{DI} \Leftrightarrow 1 = \frac{G'I}{G'F}.\frac{bc-mn}{mn}.\frac{n}{n-m} = \frac{G'I}{G'F}.\frac{bc-mn}{mn-m^2} = \frac{G'I}{G'F}.$$

Suy ra G' là trung điểm FI. Hay $G \equiv G'$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 9 (APMO 2014). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B và D cắt nhau tại điểm P trên tia AC. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt đường thẳng PD, AD lần lượt tại Q và R. Đường thẳng AQ cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng ba điểm B, E, R thẳng hàng.

Lời giải



Gọi L là giao điểm của AC, BE. Ta có $\dfrac{LA}{LC}=\dfrac{AB.AE}{CB.CE}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác PCQ với cát tuyến R,D,A ta có

$$\frac{RQ}{RC}.\frac{AC}{AP}.\frac{DP}{DQ}=1\Rightarrow\frac{RQ}{RC}=\frac{AP}{AC}.\frac{DQ}{DP}$$

Ta có $\Delta QCE\sim\Delta QAC\Rightarrow\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{EQ}{CQ}\Rightarrow\dfrac{EQ}{CE}.\dfrac{AC}{QC}=1$

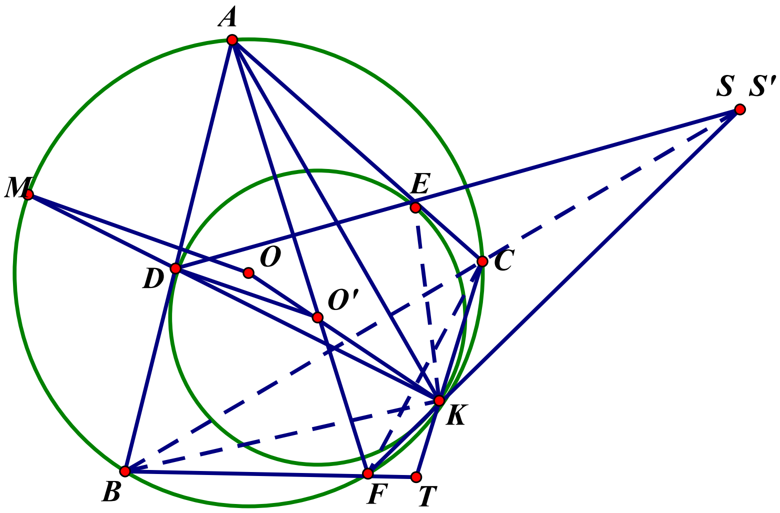
$$\Delta PBC\sim\Delta PAB\Rightarrow\frac{PB}{PA}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{PB}{PA}.\frac{AB}{CB}=1$$

Xét $T=\dfrac{LA}{LC}.\dfrac{RC}{RQ}.\dfrac{EQ}{EA}=\dfrac{AE.AB}{CE.CB}.\dfrac{DP}{DQ}.\dfrac{AC}{AP}.\dfrac{EQ}{EA}=\left(\dfrac{EQ}{CE}.\dfrac{AC}{DQ}\right)\left(\dfrac{AB}{CB}.\dfrac{PD}{PA}\right)$

$$=\left(\frac{EQ}{CE}.\frac{AC}{QC}\right)\left(\frac{AB}{CB}.\frac{PB}{PA}\right)=1 \text{ (do PD = PB, DQ = QC)}$$

Bài 10 (Đề xuất Duyên Hải Bắc Bộ). Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc trong tại điểm K, ((O’) nằm trong (O)). Điểm A nằm trên (O) sao cho *A, O, O’* không thẳng hàng. Các tiếp tuyến AD, AE của (O’) cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là B và C (*D, E* là các tiếp điểm). Đường thẳng *AO’* cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Chứng minh rằng *BC, DE, FK* đồng quy.

Giải:



Gọi M là giao điểm của KD với (O); T là giao điểm của BF và KC.

Ta có $O'D//OM \Rightarrow OM \perp AB$

. Suy ra M là điểm chính giữa của cung AB.

Gọi S là giao điểm của BC và ED; S' là giao điểm của BC và KF

Ta chứng minh S trùng với S'.

Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{S'B}{S'C}.\frac{EC}{EA}.\frac{DA}{DB}=1 \Leftrightarrow \frac{S'B}{S'C}=\frac{DB}{EC}.\frac{EA}{DA}=\frac{DB}{EC}$.

(1)

Tương tự ta có $\frac{SB}{SC}.\frac{KC}{KT}.\frac{FT}{FB}=1 \Leftrightarrow \frac{SB}{SC}=\frac{KT}{KC}.\frac{BF}{FT}=\frac{KT}{FT}.\frac{BF}{KC}$.

Mặt khác, tam giác BKT đồng dạng với tam giác CFT nên ta có

$$\frac{KB}{FC}=\frac{KT}{TF} \Rightarrow \frac{SB}{SC}=\frac{KB}{KC}. \qquad (2)$$

Do KE và KD lần lượt là hai đường phân giác của góc $\angle AKC$ và góc $\angle BKA$, nên ta có

$$\frac{KB}{KA}=\frac{DB}{DA};\frac{KC}{KA}=\frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{BD}{CE}=\frac{KB}{KC}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{SB}{SC}=\frac{S'B}{S'C}$. Suy ra S $\equiv$ S' (Điều phải chứng minh)

1.3 Bài tập tương tự

Bài 1. Chứng minh rằng trong một tam giác, chân đường phân giác trong của hai góc và chân đường phân giác ngoài của góc thứ 3 là thẳng hàng.

Bài 2. Cho tứ giác lồi ABCD, các đường DA cắt CB tại K, AB cắt DC tại L, AC cắt KL tại G và DB cắt KL tại F. Chứng minh rằng $\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{GL}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC, các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài 4 (Olympiad Hùng Vương 2013). Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Điểm *M* nằm trong tam giác; *MA*, *MB*, *MC* cắt (*O*) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Tiếp tuyến của (O) tại A_1, B_1, C_1 lần lượt cắt *BC*, *CA*, *AB* tại A_2, B_2,C_2. Chứng minh rằng ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Bài 5 (IMO Shortlist). Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *D, E, F*. Gọi *X* là điểm nằm trong tam giác *ABC* sao cho đường tròn nội tiếp tam giác *XBC* tiếp xúc với *XB*, *XC*, *BC* lần lượt tại *Z, Y, D*. Chứng minh rằng tứ giác *EFZY* nội tiếp.

Bài 6. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *AM* cắt (*O*) tại ***D***. Gọi *E, F, G, H* là trung điểm của *AB, BD, DC, CA*. Phân giác trong các góc $\widehat{EMG};\widehat{FMH}$ cắt *EG, FH* tương ứng tại *S, T*. Gọi $X = AC \cap BD; Y = AB \cap CD$.

a) Chứng minh rằng $ST \parallel XY$.

b) $P = MS \cap FH; R = MT \cap EG$. Chứng minh rằng *AD* đi qua trung điểm của *PR*.

Bài 7. Cho tam giác ABC và điểm O nằm bên trong tam giác.AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Điểm O_1 nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng $AO_1, BO_{1.}, CO_1$ theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2 .Chứng minh rằng $A_1A_2, B_1B_2.C_1C_2$ đồng quy

Bài 8. Cho tam giác ABC có O là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Nối AO, BO, CO giao BC, CA, AB ở M, N, P. Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác MNP. Nối MI, NI, PI giao PN, PM, MN ở D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Bài 9. Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Bài 10 (Moldova TST 2011). Cho ΔABC $(AB < AC)$ H là trực tâm của tam giác. A_1, B_1 lần lượt là chân đường cao hạ từ *A, B*. *D* đối xứng với *C* qua A_1. *AC* giao *DH* tại *E*. *DH* giao A_1B_1 tại *F*. *AF* giao *BH* tại *G*. Chứng minh rằng: *CH, EG, AD* đồng quy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình: Tài liệu chuyên toán hình học 10. NXB Giáo dục, 2010.

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình: Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10. NXB Giáo dục, 2006

[3] Tuyển tập lời giải và bình luận đề thi VMO các năm của nhóm tác giả Trần Nam Dũng

[4] Trang analgeomatica.blogspot.com của thầy Trần Quang Hùng

[5] Đề thi và đề đề xuất Duyên Hải, Hùng Vương các năm.

[6] Đề thi chọn đội tuyển các tỉnh.

[7] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ

[8] Trần Nam Dũng (chủ biên), *Chuyên đề toán học số 8, 9,* Trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

[9] Nguồn tại liệu từ Internet: www.artofproblemsolving.com, www.diendantoanhoc.net, www.matscope.org, www.mathlinks.org; www.imo.org.yu