SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÀO CAI

------------oOo------------

# PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BÀI TOÁN CHÌA KHÓA TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

**Họ và tên tác giả: Cao Thị Hồng Tuyết**

**Chức vụ**: Giáo viên Toán

**Tổ chuyên môn**: Toán – tin học

**Đơn vị công tác**: Trường THPT Chuyên tỉnh Lào Cai

**Lào Cai, tháng 3 năm 2020**

**Mục lục**

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chuyên đề hình học là một chuyên đề hay và khó, luôn có mặt trong các kỳ thi HSGQG, nó giữ một vai trò vô cùng quan trọng không chỉ bởi nét đẹp riêng mà còn về lượng kiến thức rất lớn. Việc tìm lời giải, con đường tư duy các bài toán hình học phẳng không chỉ nằm trong một chuyên đề nhỏ mà thường kết hợp rất nhiều kiến thức liên quan. Việc dạy cho học sinh một cái nhìn tổng quát, cách tìm hướng giải các bài toán hình học phẳng là rất khó. Vì vậy tôi muốn cung cấp cho học sinh không phải là một chuyên đề nhỏ mà là hệ thống kiến thức như những "chìa khóa", giúp học sinh sau khi vẽ hình sẽ có hệ thống kiến thức liên quan để mở ra lời giải. Học sinh có càng nhiều "chìa khóa" thì việc mở ra lời giải bài toán sẽ càng dễ dàng. Trong nội dung SKKN, tôi chỉ hướng dẫn học sinh cách dùng chìa khóa trong một số phần, và phần còn lại để học sinh tự tìm tòi, từ đó biết cách tích lũy các chìa khóa riêng cho mình, chủ động hơn trong việc xây dựng lời giải bài toán. Đây là một phương pháp hiệu quả để giải quyết các bài toán hình học phẳng.

Vì vậy tôi đã lựa chọn đề tài:

**"PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BÀI TOÁN CHÌA KHÓA TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG"**

làm đề tài sáng kiến kinh nghiệm của mình trong năm học 2019-2020.

## 2. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

### 2.1 Cơ sở lý luận của vấn đề

Trong chuyên đề hình học phẳng, có rất nhiều các định lý, tính chất từ cổ điển đến hiện đại, và việc học được hết các kiến thức liên quan đến nó là điều quá khó khăn. Trong khi đó, việc giải các bài toán hình học phẳng trong đề thi học sinh giỏi lại dựa rất lớn vào việc học sinh nắm được kiến thức cơ bản, để khi vẽ xong hình, có thể nhìn hình để biết ta đã có những tính chất nào, những gì liên quan đến bài toán, từ đó tìm hướng giải. Vì vậy, tôi muốn giúp các em có được hệ thống kiến thức quan trọng, có các chìa khóa quan trọng để dùng giải quyết các bài toán hình học phẳng. Để có thể giải quyết một bài toán hình học phẳng bằng cách sử dụng các chìa khóa này ta cần nắm rõ các nội dung cơ bản:

+ Lý thuyết và bổ đề 1 về đường đối trung.

+ Lý thuyết và bổ đề 2 về phép vị tự quay.

+ Đường tròn minxtilinear và bổ đề 3, bổ đề 4.

+ Các tính chất quan trọng liên quan đến đường kính của đường tròn nội tiếp, trung điểm cung cách đều các đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp, các đường thẳng đồng qui từ đường tròn nội tiếp, các đường tròn xung quanh đường tròn nội tiếp, đối xứng của trực tâm nằm trên đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H : giúp ta định hướng lời giải một cách nhanh nhất.

Trong bài viết này sẽ đề cập đến việc sử dụng các bổ đề chìa khóa quan trọng để ta có thể giải quyết được nhiều dạng toán trong hình học phẳng như các bài toán chứng minh 3 điểm thẳng hàng, cách điểm thuộc đường tròn, các đường thẳng, đường tròn đồng quy…, bài viết này ta không chia thành các dạng bài toán cụ thể mà chỉ tập trung vào cách nhìn hình, phát hiện ra tính chất hình để giải quyết các bài tập áp dụng. Thông qua các ví dụ đó chúng ta thấy được cách dùng các bổ đề chìa khóa trong giải toán hình học phẳng.

**2.2. Thực trạng của vấn đề**

Chuyên đề đã hệ thống lại các bổ đề chìa khóa quan trọng và cách vận dụng vào giải toán hình học phẳng trong chương trình bồi dưỡng học sinh thi học sinh giỏi các cấp. Tuy nhiên việc giải quyết được các bài toán hình học là không đơn giản. Nó đòi hỏi người làm toán ngoài việc hiểu rõ kiến thức, có các kỹ năng cần thiết thì cần phải có một tư duy sáng tạo, sắc bén. Trong khuân khổ của SKKN này chỉ trình bày việc sử dụng bổ đề chìa khóa để giải bài toán chứng minh trong hình học phẳng.

**2.3. Đối tượng nghiên cứu.**

Học sinh lớp 10 Toán và đội tuyển HSG 10 môn Toán.

**2.4. Giới hạn phạm vi nội dung nghiên cứu.**

Kiến thức dạy cho học sinh đội tuyển HSG 10, 11, 12 áp dụng cho các kì thi HSG cấp tỉnh, khu vực  và HSG quốc gia.

**2.5. Nhiệm vụ nghiên cứu.**

Giúp học sinh nắm được lý thuyết của các kiến thức liên quan đến hệ thống bổ đề, biết vận dụng vào giải toán hình học phẳng.

**2.6. Phương pháp nghiên cứu.**

Xây dựng hệ thống cơ sở lí luận dựa trên chương trình sách giáo khoa chuyên, các chuyên đề Duyên Hải, tài liệu liên quan và trao đổi với các đồng nghiệp. Trên cơ sở đó xây dựng hệ thống phương pháp giải toán.

**2.7. Thời gian nghiên cứu.**

Năm học 2019 – 2020, trong các buổi bồi dưỡng học sinh giỏi khối 10,11.

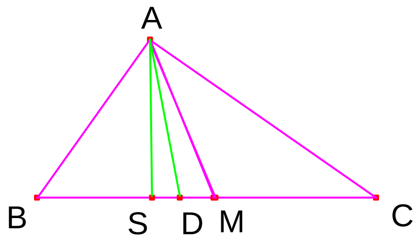
# 3. NỘI DUNG

## A. XÂY DỰNG VÀ SỬ DỤNG BỔ ĐỀ CHÌA KHÓA:

## I. Sử dụng đường đối trung của tam giác

**1.Lý thuyết đường đối trung:**

**- Định nghĩa:** Trong tam giác ABC, đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác trong AD gọi là đường đối trung của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh A.




**2.Một vài tính chất của đường đối trung**

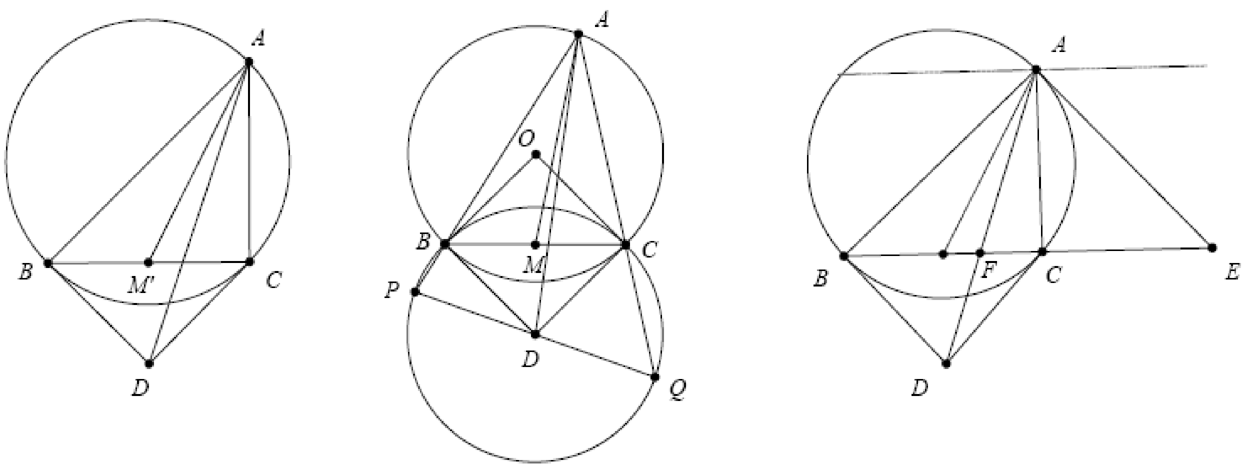
2.1.Đường đối trung chia trong cạnh đối diện thành những phần tỉ lệ với bình phương các cạnh kề.

$$\frac{SB}{SC}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

2.2.Ba đường đối trung của tam giác đồng quy tại một điểm.

2.3.Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác là quỹ tích của những điểm có tỉ số khoảng cách đến hai cạnh kề của tam giác tỉ lệ thuận với độ dài của các cạnh.

2.4.***<u>Chìa khóa 1- Bổ đề 1</u>***: Gọi $\omega$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tiếp tuyến của $\omega$ tại B, C cắt nhau tại D thì AD đối xứng với trung tuyến AM qua đường phân giác trong của góc A ( đường thẳng AD gọi là *đường đối trung* của tam giác ABC).




(Ở đây ta xét trường hợp góc $BAC$ nhọn (trường hợp $BAC$ tù chứng minh tương tự).

***<u>Lời giải 1</u>***: (Sử dụng trực tiếp định lí hàm số sin)

Gọi M là giao điểm cạnh BC với đường thẳng đối xứng với đường thẳng AD qua phân giác góc $BAC$.

Ta có $$\frac{BM}{MC}=\frac{AM.\dfrac{\sin BAM}{\sin ABC}}{AM.\dfrac{\sin CAM}{\sin ACB}}=\frac{\sin BAM}{\sin ACD}.\frac{\sin ABD}{\sin CAM}=\frac{\sin CAD.\sin ABD}{\sin ACD.\sin BAD}=\frac{CD}{AD}.\frac{AD}{BD}=1$$

$\Rightarrow BM = MC$. Do đó M là trung điểm BC.

***<u>Lời giải 2</u>***: (Sử dụng tam giác đồng dạng, kí hiêu: $\sim$)

*Cách 1:* Gọi O là tâm đường tròn $\omega$. Gọi $\Omega$ là đường tròn (D,DB). Các đường thẳng AB, AC cắt $\Omega$ tại điểm thứ hai P, Q tương ứng. Gọi M là trung điểm BC.

- Ta có : $PBQ = BQC = BAC = \frac{1}{2}\left(BDC + BOC\right) = 90^0 \Rightarrow PQ$ là đường kính của đường tròn $\Omega$ $\Rightarrow D \in PQ$.
- Ta có : $\Delta ABC \sim \Delta AQP$ và M là trung điểm BC, D là trung điểm PQ $\Rightarrow BAM = QAD \Rightarrow$ đpcm.

*Cách 2:* Gọi E là giao điểm thứ hai của AD và $\omega$. Đường thẳng đối xứng với AD cắt BC tại M'. Ta có $\Delta ABM' \sim \Delta AEC \,\&\, \Delta AM'C \sim \Delta ABE\ (g-g)$. Suy ra $\frac{M'B}{AM'} = \frac{EC}{AC} \,\&\, \frac{M'C}{AM'} = \frac{BE}{AB}$ (1)

Ta có $\Delta DEC \sim \Delta DCA \,\&\, \Delta DBE \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{DC}{AD} \,\&\, \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{AD}$,

mà $DC = DB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{BE}{AB}$ (2). Từ (1) & (2) suy ra $\frac{M'C}{AM'} = \frac{BM'}{AM'} \Rightarrow CM' = BM' \Rightarrow M' \equiv M$ $\Rightarrow$ (đpcm).

*Cách 3:* (sử dụng định lí Ptôlêmê)

Gọi E là giao điểm thứ hai của $\omega$ và AD. Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác ACEB, ta có $AC.BE + AB.CE = AE.BC.$ (1)

Ta có $\Delta DEC \sim \Delta DCA \,\&\, \Delta DBE \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{DC}{AD} \,\&\, \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{AD}$,

mà $DC = DB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow AC.BE = AB.CE.$ (2)

Từ (1), (2) & $MB = MC$ suy ra

$$AC.BE = MC.AE \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{CM}{CA} \,\&\, AEB = ACM \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta AMC \Rightarrow BAE = MAC$$

$\Rightarrow AM \,\&\, AE$ đối xứng nhau qua phân giác góc $BAC$.

***<u>Lời giải 3</u>***: (sử dụng phép nghịch đảo)

Tiếp tuyến của đường tròn $\omega$ tại A cắt BC tại E. Gọi $F = BC \cap AD.$

Ta có BC là đường đối cực của điểm D đối với $\omega$. Suy ra điểm D thuộc thuộc đường đối cực của điểm E và AD là đường đối cực của điểm E. Suy ra B, C, E, F là hàng điểm điều hòa $\Rightarrow A(EFCB) = -1$.

Xét phép đối xứng qua đường phân giác góc $BAC$, khi đó chùm điều hòa A(EFCB) cũng có ảnh là một chùm điều hòa. Qua phép đối xứng trên thì AE biến thành đường thẳng song song với BC, AF biến thành AM $(M \in BC)$, $AC \to AB, AB \to AC$. suy ra $A(\infty MBC) = -1 \Rightarrow M$ là trung điểm BC.

***<u>Lời giải 4</u>***: (Sử dụng hàng điểm điểm đều hòa)

Gọi M là giao điểm của OD và BC, H, K là giao điểm của $\omega$ với OD (H xen giữa M và D). Ta có $OA^2 = OH^2 = OB^2 = \overline{OM}.\overline{OD} \Rightarrow (K,H,M,D) = -1$

$\Rightarrow A(K,H,M,D)=-1$. Mà $HA \perp KA \Rightarrow HA, KA$ lần lượt là phân giác trong và ngoài góc $DAM \Rightarrow AD$ và AM đối xứng nhau qua phân giác góc $BAC$.

Hay phát biểu cách khác: ***Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của tam giác tại hai đỉnh kia.***

Chúng ta coi đường đối trung của tam giác như một tính chất đã biết để vận dụng giải toán.

**Vận dụng:**

**Bài toán 1**: ***[IMO Shortlist 2003].*** Ba điểm A, B, C cố định trên một đường thẳng theo thứ tự đó. Gọi Γ là một đường tròn đi qua A, C và có tâm không nằm trên AC. Gọi P là giao điểm của các tiếp tuyến của Γ tại A và C. Giả sử Γ cắt đoạn PB tại Q. Chứng minh rằng giao điểm của phân giác $AQC$ và đường thẳng AC không phụ thuộc vào cách chọn Γ.

***Nhận xét:*** Vẽ hình, ta thấy xuất hiện tính chất 2.4.

***Lời giải***:

Theo 2.1 và 2.4 ta có

$$\frac{BA}{BC}=\frac{AQ^2}{CQ^2};\frac{RA}{RC}=\frac{AQ}{QC}$$

Suy ra

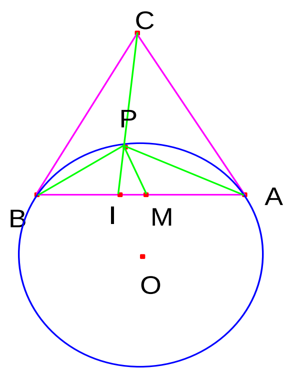
$$\frac{BA}{BC}=\frac{RA^2}{RC^2}$$

Do đó R cố định.(đpcm)

**Bài toán 2**: ***[Poland 2000].*** Cho tam giác ABC cân tại C, P là một điểm nằm bên trong tam giác ABC sao cho $PAB = PBC$. Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh rằng: $APM + BPC = 180^0$.

***Nhận xét:*** Từ giả thiết P là một điểm nằm bên trong tam giác ABC sao cho $PAB = PBC$ suy ra BC là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Mà tam giác ABC cân, chứng minh được AC cũng là tiếp tuyến. Dùng chìa khóa 2.4 để giải bài toán.

***Lời giải:***




Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABP.

Từ giả thiết ta có CB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

CP đối xứng PM qua phân giác góc APB.

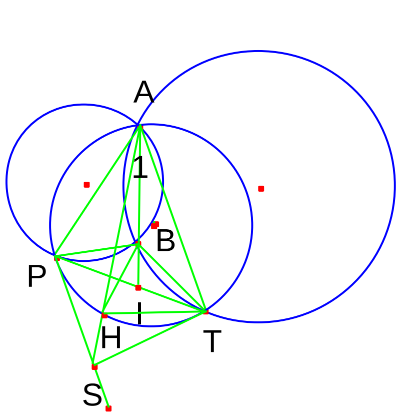
Kéo dài CP cắt AB tại I, khi đó $\widehat{BPI} = \widehat{MPA}$

Mà $\widehat{PBM}+\widehat{APC}=\widehat{IPA}+\widehat{APC}=180^0$.

Suy ra $\widehat{CPB}+\widehat{APM}=360^0-(\widehat{BPM}+\widehat{APC})=180^0$ (đpcm).

**Bài toán 3:** ***[VMO TST 2001].***

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi PT là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó ( P, T là tiếp điểm). Các tiếp tuyến tại P, T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT. Chứng minh A, S, H thẳng hàng.




***Nhận xét:*** Vẽ hình, cho học sinh tự dựa và hình vẽ tìm bài toán chìa khóa với đường tròn ngoại tiếp tam giác APT, sau đó giải bài toán.

***Lời giải:*** Ta có $\widehat{BPT}=\widehat{PAB},\widehat{BTP}=\widehat{BAT}\Rightarrow\widehat{PBT}+\widehat{PAT}=180^0$

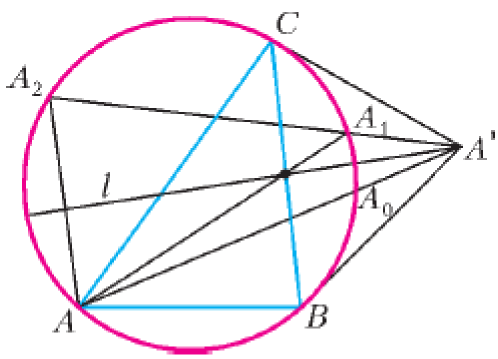
Suy ra $\widehat{PHT}+\widehat{PAT}=180^0\Rightarrow$ Tứ giác APHT nội tiếp được.

Khi đó $\widehat{TAH}=\widehat{TPH}=\widehat{BPT}=\widehat{PAB}$, do đó PH đối xứng với AB qua phân giác của $\widehat{PAT}$. Giả sử AB cắt PT tại I, suy ra I là trung điểm PT. Suy ra AS đối xứng với AI qua đường phân giác góc $\widehat{PAT}$. Vậy A, H, S thẳng hàng.

**Bài tập áp dụng**

1. ***[USA TST 2007].*** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\omega$. Các tiếp tuyến của $\omega$ tại B, C cắt nhau tại T. S là một điểm nằm trên tia BC sao cho $AS\perp AT$. Các điểm $B_1$, $C_1$ nằm trên tia ST (với $C_1$ nằm giữa $B_1$ và S) sao cho $B_1T=BT=C_1T$. Chứng minh rằng Tam giác ABC đồng dạng với tam giác $AB_1C_1$.
2. ***[USA 2008].*** Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB tương ứng. Trung trực của AB, AC cắt tia AM tại D, E tương ứng, gọi F là giao điểm của BD và CE, F nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng A, N, F, P cùng nằm trên một đường tròn.
3. [*Kvah 2031*].

Các đường thẳng đi qua các đường trung tuyến ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp $\omega$ tại các điểm thứ hai $A_1,B_1,C_1$, tương ứng. Các đường thẳng đi qua các đỉnh A, B, C của tam giác ABC song song với các cạnh đối diện cắt $\omega$ lần thứ hai tại $A_2,B_2,C_2$. Chứng minh rằng $A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2$



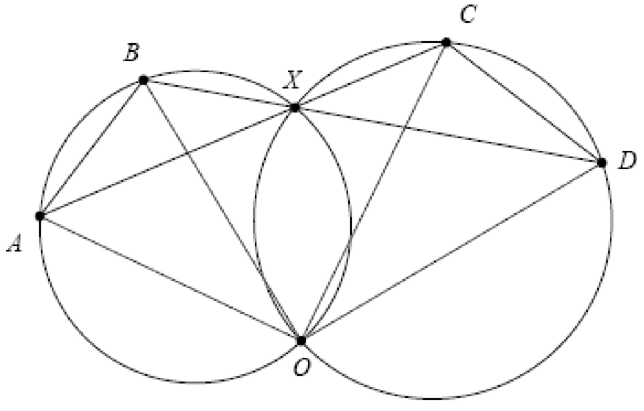
đồng qui tại một điểm.

## II. Phép vị tự quay.

***Khi sử dụng phép vị tự quay, có một tính chất được dung rất nhiều trong các bài toán:***

***<u>Chìa khóa 2- Bổ đề 2:</u>***

Cho hai đoạn thẳng AC, BD cắt nhau tại X. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABX, CDX cắt nhau lần nữa tại điểm O. Khi đó O là tâm của phép của phép vị tự quay biến AB thành CD.




***Lời giải:***

Ta có $OBD = OAC, OCA = ODB$

$\Rightarrow \Delta OAC \sim \Delta OBD \Rightarrow$đpcm

**Vận dụng:**

**<u>Bài toán 4:</u>** (***Điểm Miquel của tứ giác***). Cho *ABCD* là một tứ giác. *AB* và *CD* cắt nhau tại *K*, và *DA*, *CB* gặp nhau tại *L*. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ADK, ABL, BCK, CDL* cùng đi qua một điểm *M*

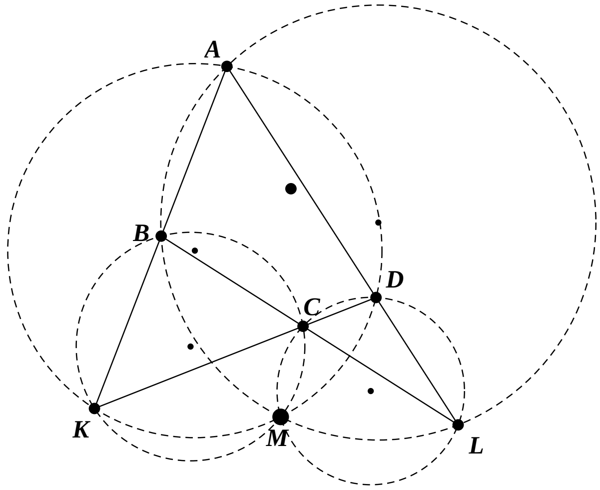
***Nhận xét:*** Vẽ hình, cho học sinh nhận thấy có thể sử dụng chìa khóa 2 hai lần.

***<u>Lời giải:</u>***

Gọi *M* là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác *ABL* và *DCL*. Khi đó *M* là tâm của phép vị tự quay quay biến *A* thành *D* và *B* thành *C*.

*M* cũng là tâm của phép vị tự quay biến *A* thành *B* và *D* thành *C*. Theo cách xác định tâm của phép vị tự quay thì *M* là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác *BCK* và *ADK*.

Vậy 4 đường tròn trên đi qua *M*.




**<u>Bài toán 5:</u>** (***TST Mỹ 2007***) Hai đường tròn ($O_1$) và ($O_2$) cắt nhau tại *P* và *Q*. *AC*, *BD* tương ứng là những dây cung của ($O_1$) và ($O_2$) sao cho đoạn thẳng *AB* và tia *CD* cắt nhau tại *P*. Tia *BD* cắt đoạn *AC* tại *X*. Điểm *Y* nằm trên ($O_1$) sao cho *PY* song song với *BD*. Điểm *Z* nằm trên ($O_2$) sao cho *PZ//AC*. Chứng minh rằng các điểm *Q, X, Y, Z* cùng nằm trên một đường thẳng.

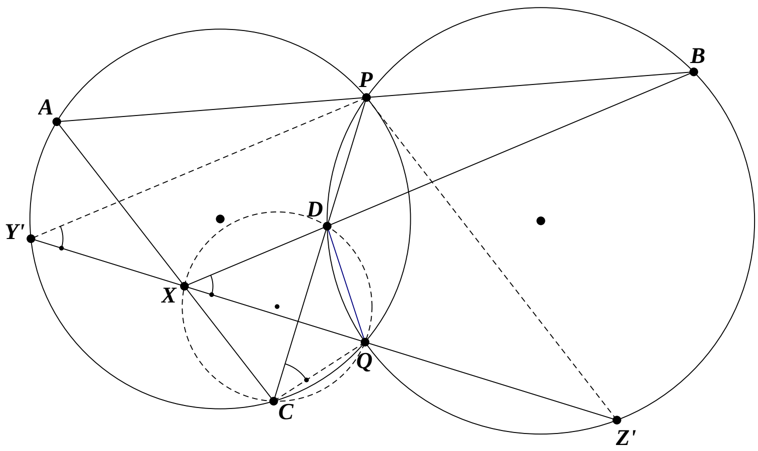
***Nhận xét:*** Sử dụng chìa khóa 2, cho ta công cụ khai thác tính chất hai đường tròn cắt nhau. Một dấu hiệu cơ bản là xuất hiện các điểm "cùng tính chất" trên hai hình.

**Giải**

Gọi *XQ* cắt ($O_1$) tại *Y'*; cắt ($O_2$) tại *Z'*, *Q* là tâm của phép vị tự quay biến *D* thành *C*; *B* thành *A*. Do đó *Q* cũng là tâm của phép vị tự quay biến *D* thành *B*; *C* thành *A*. Theo cách xác định tâm của phép vị tự quay này thì *Q* nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác *XDC*.

*X, D, Q, C* cùng nằm trên đường tròn nên $DXQ = DCQ = PY'Q$. Suy ra *DX//PY'*.
Vậy $Y' \equiv Y$.

$DPZ' = DQX = DCX$ . Suy ra *PZ'//AC*. Vậy $Z' \equiv Z$.
Vậy các điểm *Q, X, Y, Z* cùng nằm trên một đường thẳng.

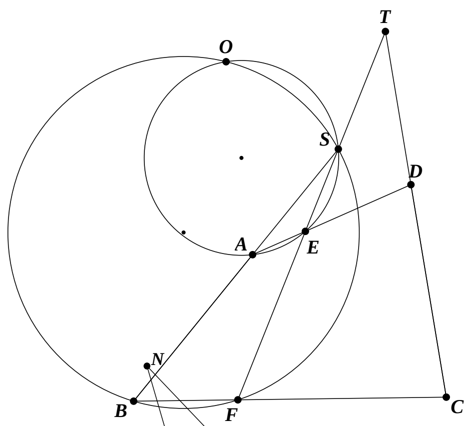



**Bài toán 6: *<u>(HSG Mỹ 2006)</u>*** Cho tứ giác lồi *ABCD*, gọi *E, F* lần lượt là các điểm trên cạnh *AD, BC* sao cho $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Tia *FE* cắt tia *BA* và tia *CD* tại *S* và *T*. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác *SAE, SBF, TCF, TDE* cùng đi qua một điểm chung.

***Nhận xét:*** Các điểm E, F là các điểm có "cùng tính chất trên các đoạn AD và BC"; qua phép đồng dạng sẽ biến một điểm có tính chất này thành một điểm cũng có tính chất đó trên ảnh của nó. Gọi O là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác SAE và SBF. Ta chúng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác TCF, TDE cùng đi qua O. Để ý rằng O là tâm của phép vị tự quay biến A thành B và E thành F.

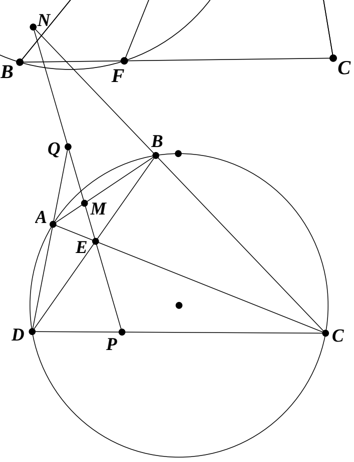
***<u>Lời giải:</u>***

Gọi *O* là tâm của phép vị tự quay *f* biến *B* thành *A* và *F* thành *E*. Qua *f* biến tia *BE* thành tia *AF*, mà $\frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$ nên qua *f* biến *C* thành *D*.




Theo cách xác định tâm của phép vị tự quay biến *F* thành *E*; *C* thành *D* thì *O* là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác *TFC* và *TED*.
Vậy bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác *SAE, SBF, TCF, TDE* cùng đi qua một điểm chung *O*. (đpcm)

***Ý tưởng này cũng được áp dụng tương tự trong bài TST Việt Nam 2013, trong đó dữ kiện hai tỷ số bằng nhau được thay bằng đường phân giác***




"Cho tứ giác *ABCD* có các cạnh đối không song song nội tiếp đường tròn (*O*; *R*). Gọi *E* là giao điểm hai đường chéo và đường phân giác góc $AEB$ cắt các đường thẳng *AB, BC, CD, DA* lần lượt tại các điểm *M, N, P, Q*. Chứng minh rằng các đường tròn (*AQM*), (*BMN*), (*CNP*), (*DPQ*) cùng đi qua một điểm”

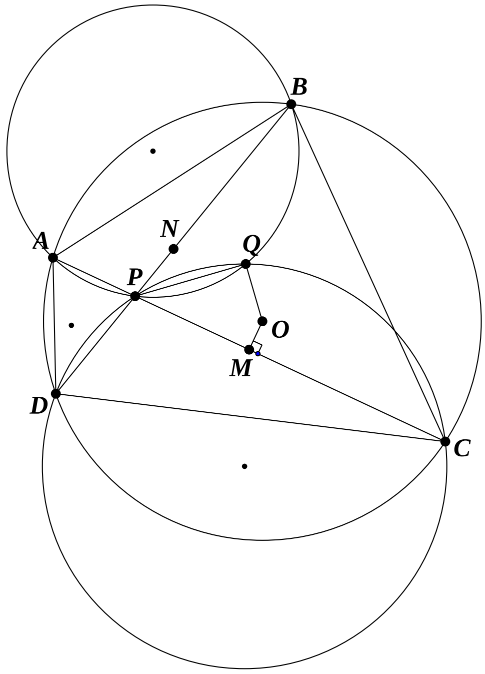
Theo tính chất đường phân g.iác thì $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{PD}{PC}$

(do *EA.EC* = *EB.ED*)

**<u>Bài toán 7:</u> *[China 1992]***Cho tứ giác lồi *ABCD* nội tiếp đường tròn tâm *O*. Đường chéo *AC* cắt *BD* tại *P*. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ABP* và *CDP* cắt nhau tại *P* và *Q* phân biệt khác *O*. Chứng minh $OQP=90^0$.

**Nhận xét:** Cho học sinh nhận ra chìa khóa 2: Để ý thấy Q chính là tâm của phép vị tự quay biến A thành C và B thành D và do đó cũng là tâm của phép vị tự quay f biến A thành B và C thành D.

Yêu cầu cần chứng minh tương đương với việc chứng minh 4 điểm Q, P, M, N nằm trên một đường tròn (M, N lần lượt là trung điểm AC, BD)




***<u>Lời giải:</u>***

Xét phép vị tự quay *f* biến *AC* thành *BD* do đó biến trung điểm của *AC* là *M* thành trung điểm của *BD* là *N*.

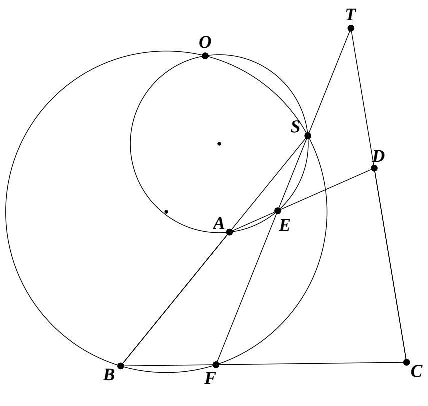
Theo định nghĩa phép vị tự quay suy ra $(QM,QN)=(QA,QB)$

Mà $(QA,QB)=(PA,PB)$ (do *A, P, Q, B* cùng nằm trên đường tròn)

Suy ra $(QM,QN)=(PA,QB)$.

Do đó bốn điểm *P, M, Q, N* cùng nằm trên dường tròn. Mà ta lại có *O, P, M, N* cùng nằm trên đường tròn đường kính *OP* nên $OQP=90^0$ (đpcm).

**<u>Bài toán 8:</u> *[IMO Shortlist 2006]***Trên các cạnh *BC, CA, AB* của tam giác *ABC* lấy các điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1$, $BC_1A_1$ và $BC_1A_1$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại điểm thứ hai $A_2$, $B_2$, $C_2$. Gọi $A_3$, $B_3$, $C_3$ lần lượt là các điểm đối xứng với $A_1$, $B_1$, $C_1$ qua trung điểm của *BC, CA, AB*. Chứng minh rằng các tam giác $A_2B_2C_2$ và $A_3B_3C_3$ đồng dạng.




**Nhận xét:** Yêu cầu học sinh tìm bài toán chìa khóa: ta có các phép vị tự quay nào? Liệt kê? Ta cần chứng minh điều gì? Từ đó tìm lời giải.

***<u>Lời giải:</u>***

Theo tính chất đối xứng ta có $BA_1=CA_3;AC_1=BC_3;AB_1=CB_3$

$C_2$ là tâm của phép vị tự quay biến $A_1$ thành $B_1$ và *B* thành *A* nên tam giác $C_2A_1B$ đồng dạng với tam giác $C_2B_1A$.

Suy ra $\dfrac{C_2A_1}{C_2B_1}=\dfrac{BA_1}{AB_1}=\dfrac{CA_3}{CB_3}$

Suy ra tam giác $CA_3B_3$ đồng dạng với tam giác $C_2A_1B_1$.
$C_2$ là tâm của phép vị tự quay biến $A_1$ thành $B$ và $B_1$ thành $A$. Do đó, tam giác $C_2BA$ đồng dạng với tam giác $C_2A_1B_1$ vì vậy nó đồng dạng với tam giác $CA_3B_3$.

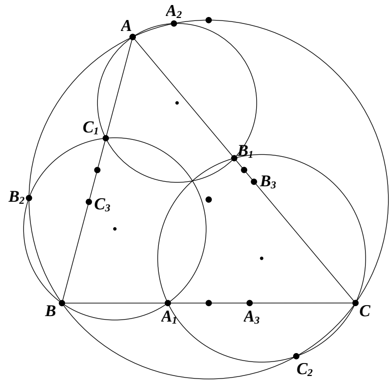
Suy ra $CA_3B_3 = C_2BA$.

Tương tự $BA_3C_3 = B_2CA$

Suy ra $B_3A_3C_3 = 180^0 - BA_3C_3 - CA_3B_3$

$= 180^0 - B_2CA - C_2BA = B_2A_2C_2$

Tương tự $B_3C_3A_3 = B_2C_2A_2$ .
Suy ra $A_2B_2C_2$ và $A_3B_3C_3$ đồng dạng. (đpcm)




***Kết hợp chìa khóa 2 và mô hình hai tam giác đồng dạng cùng một đỉnh, ta có công cụ chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, và chứng minh 4 điểm nằm trên một đường tròn.***

**Bài toán 9:** (***HSG Nam Tư 1983***) Trên dây cung *AB* của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật *ABCD* người ta lấy điểm *M* khác *A* và *B*. Gọi *P, Q, R, S* lần lượt là hình chiếu của *M* trên các đường thẳng *AD, AB, BC* và *CD*. Chứng minh rằng đường thẳng *PQ* và *RS* vuông góc với nhau và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo của hình chữ nhật.

***Lời giải:***

Không mất tổng quát giả sử *M* nằm trên cung nhỏ *AB*.
- Chứng minh được tam giác *MBQ* đồng dạng tam giác *SPD*.

Suy ra $\dfrac{BQ}{PD} = \dfrac{MQ}{SD} = \dfrac{MB}{SP} = k$

Xét phép vị tự quay $f = V_{(M,k)} \circ Q_{(M,90^0)}$ biến điểm *P, S, D* lần lượt thành *Q, R, B*.

Theo tính chất của tâm vị tự quay thì *PQ, SR, DB* đồng quy tại điểm *N* là giao điểm thứ hai của ha đường tròn (*MQBR*) và (*MPDS*) (đpcm).

**Bài tập áp dụng**

1. Cho tứ giác ABCD, đường chéo AC và BD cắt nhau tại P. Gọi $O_1$, $O_2$ là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPC tương ứng. Gọi M, N, O là trung điểm AC, BD, $O_1O_2$. Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPN.
2. ***[USAMO 2006].*** Cho tứ giác ABCD, lấy các điểm E, F thuộc các cạnh các cạnh AD, BC tương ứng sao cho $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC}$.Tia FE cắt các tia BA, CD tại S, T tương ứng. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAE, SBF, TCF, TDE cùng đi qua một điểm chung.
3. ***[IMO 2005].*** Cho tứ giác lồi ABCD có $BC = AD, BC \neq AD.$Gọi E, F thuộc cạnh BC, AD tương ứng, sao cho $BE = DF$. Gọi P là giao điểm AC và BD, Q là giao điểm BD và EF, R là giao điểm của EF và AC. Xét tất cả các tam giác PQR khi E, F thay đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tất cả các tam giác đócó một điểm chung khác P.
4. ***[IMO Shortlist 2002].*** Các đường tròn $S_1$, $S_2$ cắt nhau tại P và Q. Các điểm $A_1$, $B_1$ (khác P, Q) nằm trên $S_1$. $A_1P$, $B_1P$ cắt $S_2$ tại $A_2$, $B_2$ tương ứng. $A_1B_1$ cắt

$A_2B_2$ tại C. Chứng minh khi $A_1$, $B_1$ thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2C$ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

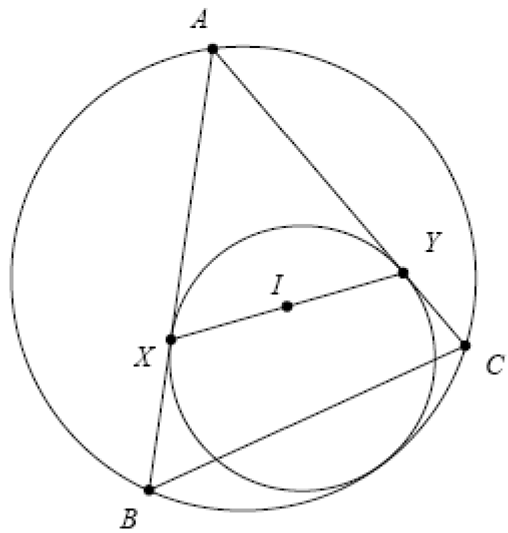
5. ***[USA TST 2006].*** Cho tam giác ABC nhon, các đường cao AD, BE, CD, trực tâm là H. Một đường tròn $\omega$ tâm O, đi qua A và H cắt AB, AC tại Q và P (khác A), tương ứng. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OPQ tiếp xúc BC tại R. Chứng minh rằng $\frac{CR}{BR}=\frac{ED}{FD}$.

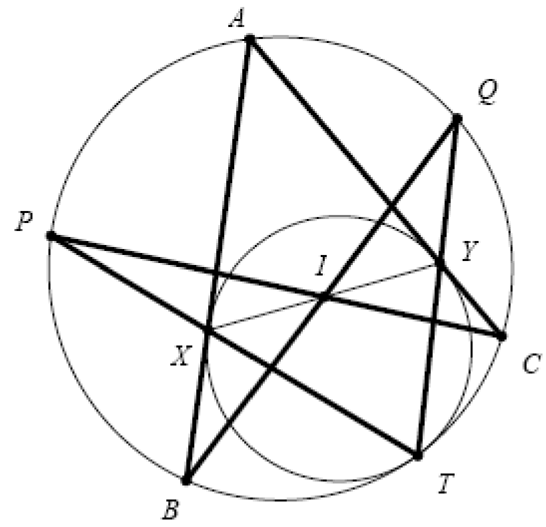
**III. Trung điểm dây cung của đường tròn minxtilinear.**

Đường tròn minxtilinear nội tiếp (hay bàng tiếp) là đường trò tiếp xúc với hai cạnh tam giác và tiếp xúc trong ( ngoài) với đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Đường tròn này có rất nhiều tính chất thú vị, nhưng trong chuyên đề này tôi chỉ xét một tính chất quan trọng:

***<u>Chìa khóa 3 – Bổ đề 3</u>:*** **(Bổ đề Sawayama)** Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi $\omega$ là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại X, Y, tương ứng và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó I là trung điểm XY.

***Lời giải:*** Gọi T là điểm tiếp xúc của $\omega$ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.




Gọi P, Q là giao điểm thứ hai của TX, TY với đường tròn (ABC), tương ứng. Suy ra P, Q là trung điểm cung AB, AC tương ứng.

Áp dụng định lí *Pascal's* cho lục giác BACPTQ suy ra X, I, Y thẳng hàng. Từ I nằm trên đường phân giác của góc $XAY$ và AX = AY suy ra I là trung điểm của XY.

***Bài tập áp dụng***

1. ***[IMO 1978].*** Cho tam giác ABC cân tại A. Một đường tròn tiếp xúc trong với (ABC) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại P, Q tương ứng. Chứng minh rằng trung điểm PQ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
2. Cho tam giác ABC. Một đường tròn $\omega$ tiếp xúc trong với đường tròn (ABC) và tiếp xúc với AB, AC. Gọi P là điểm tiếp xúc của $\omega$ với (ABC). I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. PI cắt (ABC) tại P, Q. Chứng minh rằng $BQ=CQ$.

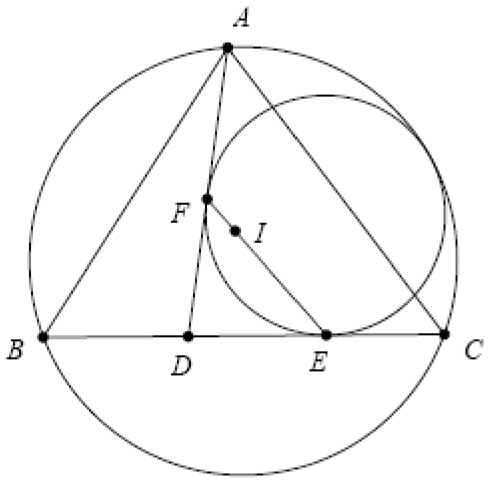
***<u>Chìa khóa 4 - Bổ đề 4</u>:*** **(Mở rộng của bổ đề 3 trước)**. Cho tam giác ABC, tâm đường tròn nội tiếp I; D là một điểm thuộc cạnh BC. Xét một đường tròn $\omega$ tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp (ABC) và tiếp xúc với DC, DA tại E, F, tương ứng. Khi đó E, I, F thẳng hàng.

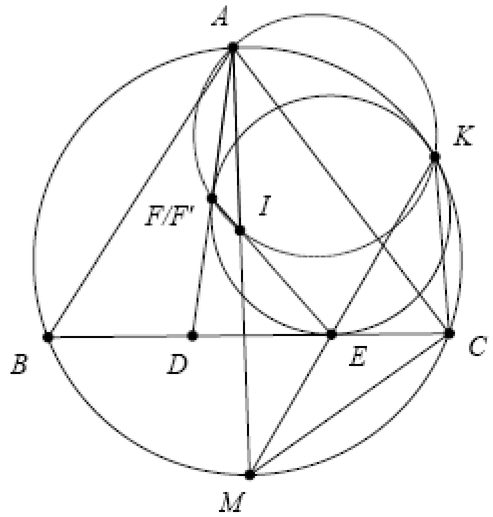
***Lời giải:*** (Chú ý bổ đề này có tên là định lí *Lyness*).

**Cách 1:** Giả sử $\omega$ tiếp xúc với (ABC) tại K và tiếp xúc với đoạn DC, DA tại E, F tương ứng.Gọi M là trung điểm cung BC không chứa điểm K. Thì K, M, E thẳng hàng, cũng có A, I, M thẳng hàng và $MB = MC$. Đường thẳng EI cắt đường tròn $\omega$ tại F', ta sẽ chứng tỏ rằng AF' là tiếp tuyến của $\omega$, khi đó $F \equiv F'$ và ta sẽ có điều phải chứng minh.

Với chú ý rằng góc $KF'E$ chắn cung $KE$ của đường tròn $\omega$ và $KAM$ chắn cung $KM$ của đường tròn (ABC). Từ $KE$ và $KM$ vị tự với nhau qua phép vị tự tâm K, chúng ta được $KF'E = KAM \Rightarrow A, K, I, F'$ cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $MC^2 = ME.MK,$



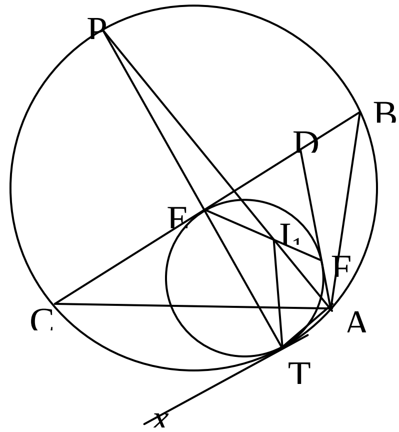




mà

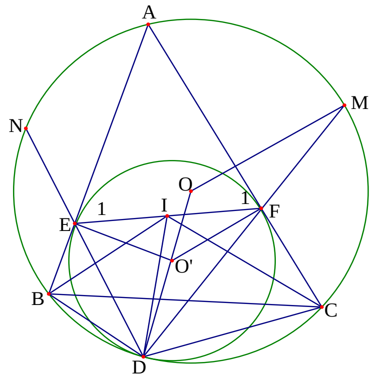
$MC = MI \Rightarrow MI^2 = ME.MK \Rightarrow \Delta MEI \sim \Delta MIK \Rightarrow KEI = AIK = \text{A F'K}$ $(A, K, I, F'$ nằm trên một đường tròn). Suy ra AF' là tiếp tuyến của đường tròn $\omega$ $\Rightarrow$ đpcm.

Cách 2: Giả sử $\omega$ tiếp xúc với (ABC) tại T suy ra TE đi qua trung điểm P của cung BC không chứa T của (ABC).

Gọi $I_1$ là giao điểm của AP và EF. Vẽ tiếp tuyến chung T*x* với $\omega$ và (ABC). Ta có $TFI_1 = \text{ET}x = PTx = I_1AT \Rightarrow AFI_1T$ nội tiếp$\Rightarrow AI_1T = AFT = TEF \Rightarrow PI_1$ là tiếp tuyến của đương tròn $(TEI_1)$$\Rightarrow PI_1^2 = PE.PT = PB^2 = PC^2$ (Do $\Delta PCE \sim \Delta PTC$) $\Rightarrow I_1$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC $\Rightarrow I_1 \equiv I$ (đpcm).



**Cách 3: Chứng minh:**



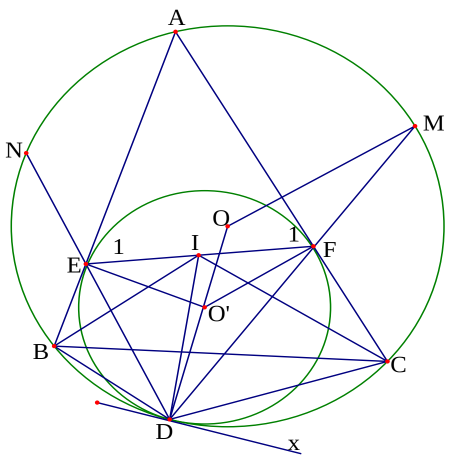

Vẽ tia phân giác của $BDC$ cắt $EF$ tại $I$; gọi $M,N$ là giao điểm của $DF,DE$ với đường tròn $O$. Ta có $O'FD = OMD = ODM$ nên $O'F//OM$ mà $O'F \perp AC \Rightarrow OM \perp AC \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung $AC$, do đó $FDC = \frac{1}{2}ABC$ (1). Tam giác $AEF$ cân tại $A$ ( Do $AE,$ AF là các tiếp tuyến của $(O')$) nên $E_1 = F_1 = \frac{180^0 - A}{2}$, mặt khác $IDC = IDB = \frac{BDC}{2} = \frac{180^0 - A}{2}$ (Tính chất góc nội tiếp của tứ giác $ABDC$) nên $IDB = IDC = E_1 = F_1$. Mà $EDF = F_1\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}EF\right)$

$\Rightarrow IDC = EDF \Rightarrow IDE = FDC$ (2). Vì $E_1 = IDB$ nên $IEDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow IDE = IBE$ (3). Từ (1),(2) và (3) ta có $IBE = \frac{1}{2}ABC$, do đó $IB$ là tia phân giác của $ABC$. Do $IDC = IDB$ mà $IDE = FDC$ nên $BDE = IDF$. Tứ giác $IFCD$ nội tiếp (vì $F_1 = IDC$).

$\Rightarrow IDF = ICF \Rightarrow ICF = BDE$ (4). Mặt khác, do $N$ là điểm chính giữa của $AB$ (chứng minh tương tự ở trên)$\Rightarrow BDE = \frac{1}{2}ACB$ (5). Từ (4) và (5) suy ra $ICF = \frac{1}{2}ACB$, do đó $IC$ là tia phân giác của $ACB$. Vậy $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ (đpcm)

**Cách 4:**



Vẽ tia phân giác của $ABC$ cắt $EF$ tại $I$, ta chứng minh $IC$ là tia phân giác của $ACB$. Vẽ tiếp tuyến chung $Dx$ của $O$ và $O'$. Tương tự như cách trên, gọi $M$ là giao điểm của $DF$ với $O$ thì $M$ là điểm chính giữa của $AC$, do đó $B, I, M$ thẳng hàng.

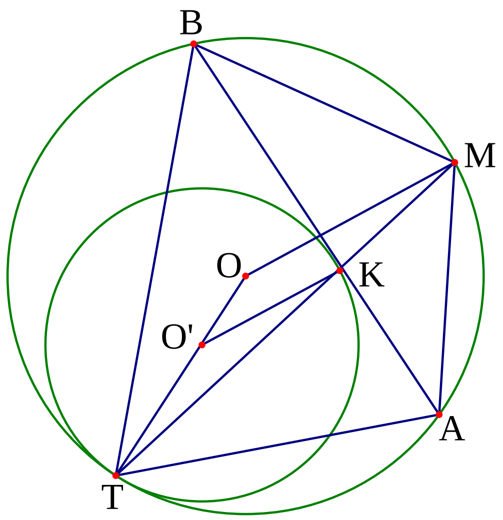
Ta có $IED = IBD = xDM$ nên tứ giác $IEDB$ nội tiếp $\Rightarrow IDB = E_1 = \dfrac{180^0 - A}{2}$, mà $BDC = 180^0 - A$, do đó $IDC = \dfrac{180^0 - A}{2} = F_1 \Rightarrow$ tứ giác $IDCF$ nội tiếp $\Rightarrow ICF = IDF$.

Ta lại có $IDF = IDC - FDC = \dfrac{180^0 - A}{2} - \dfrac{ABC}{2} = \dfrac{ACB}{2} \Rightarrow ICF = \dfrac{ACB}{2}$, do đó $IC$ là tia phân giác của $ACB$ (đpcm).

**Bài toán 10:( Định lý Lyness mở rộng)** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $O$ $M$ là một điểm bất kỳ trên cạnh $AC$. Đường tròn $O'$ tiếp xúc với đường tròn $O$ tại $D$ và tiếp xúc với $MB, MC$ lần lượt ở $E, F$. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ nằm trên $EF$.

**Nhận xét:**

**Cắt hình cho học sinh phát hiện bổ đề 3. Có** Cho $AB$ là dây của đường tròn $O$. Đường tròn $O'$ tiếp xúc với $O$ tại $T$ và tiếp xúc với $AB$ tại $K$. Chứng minh rằng $TK$ đi qua điểm chính giữa của cung $AB$ và $MA^2 = MK.MT$ (với $M$ là điểm chính giữa của $AB$).

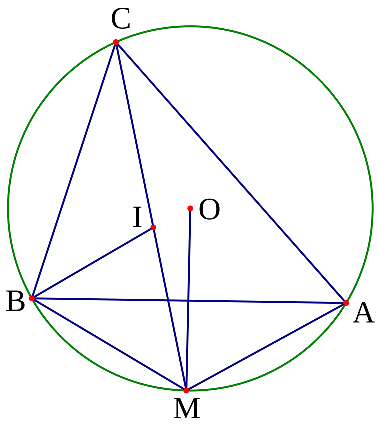



Bây giờ ta chứng minh $MA^2 = MK.MT$.

Thật vậy, ta có $MTA = MBA = MAK \Rightarrow \Delta MKA \sim \Delta MAT$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MA}{MT} \Rightarrow MA^2 = MK.MT$.

**Lại có:** tam giác $ABC$ nội tiếp nội tiếp đường tròn $O$ và $M$ là điểm chính giữa của $AB$ không chứa $C$. Trên $MC$ lấy $I$ sao cho $MI = MB$. Chứng minh rằng $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

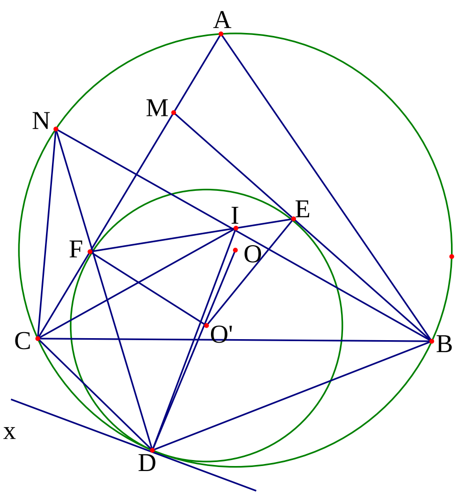



Thật vậy, gọi $I'$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ thì $I'$ là giao điểm của đường phân giác trong góc $B$ với $MC$. Ta có $I'BM = I'BA + ABM = I'BC + BCM = BI'M$ suy ra tam giác $MBI$ cân tại $M$ hay $MI' = MB$.
Do đó $MI = MI'$ hay $I \equiv I'$. Vậy $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

***<u>Lời giải:</u>***

Gọi $N$ giao điểm của $DF$ với $O$ thì $N$ là điểm chính giữa của $AC$ và $NC^2 = NF.ND$ (theo bổ đề 1). Gọi $Dx$ là tiếp tuyến chung của $O$ và $O'$ tại $D, I$ là giao điểm của $BN$ và $EF$. Ta có $IED = IBD = xDN$ nên tứ giác $IEBD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow DIB = DEB$. Mà $DEB = DFI$ nên $DIB = DFI$, do đó $NID = NFI$ (cùng kề bù với hai góc bằng nhau). Từ đó chứng minh được $\Delta NFI \sim \Delta NID$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NF}{NI} = \dfrac{NI}{ND} \Rightarrow NI^2 = NF.ND = NC^2 \Rightarrow NI = NC$. Theo bổ đề 2, ta có $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ (đpcm).




**Bài toán 11: (Một hệ quả của định lý Lyness mở rộng)**

Cho đường tròn $(O)$ hai điểm $A$ và $B$ nằm trên đường tròn điểm $C$ nằm trong đường tròn $(O)$. Đường tròn $(O')$ tiếp xúc trong với $(O)$ tại $R$ và tiếp xúc với $CA, CB$ theo thứ tự ở $P, Q$. Gọi $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $I$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $APR$.

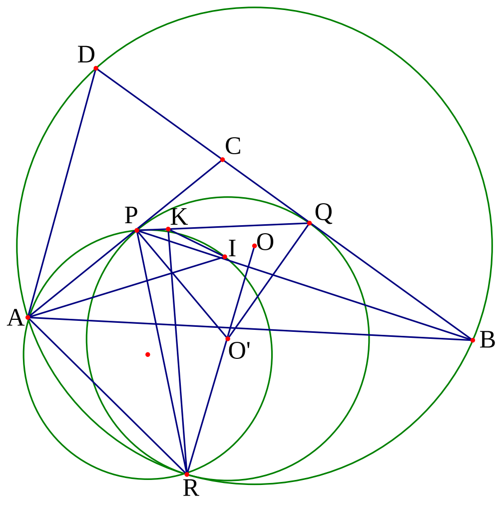
**Nhận xét:** Vẽ hình, cho học sinh phát hiện bổ đề 4 để suy ra B, I, K thẳng hàng, với $D$ là giao điểm của $BC$ với $(O)$, $K$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $ADB$.

***<u>Lời giải:</u>***

Gọi $D$ là giao điểm của $BC$ với $(O)$, $K$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $ADB$. Ta có $B, I, K$ thẳng hàng và $K$ nằm trên $PQ$ (theo bổ đề 4 Sawayama). Dễ thấy $A, P, K, R$ cùng nằm trên một đường tròn. Do $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ nên $AIB = 90 + \frac{ACB}{2}$. Ta lại có $APK = 180^0 - CPK = 180^0 - \frac{180^0 - ACB}{2} = 90^0 + \frac{ACB}{2}$.

Do đó $AIB = APK$ nên $A, P, K, I$ cùng nằm trên một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A, P, R, K, I$ cùng trên một đường tròn. Vậy $I$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $APR$.




**Bài tập áp dụng**

1. ***[Bulgaria 2005].*** Cho hai đường tròn $k_1, k_2$ tiếp xúc ngoài nhau tại T. Một đường thẳng tiếp xúc $k_2$ tại X cắt $k_1$ tại A và B. Gọi S là giao điểm thứ hai của $k_1$ với đường thẳng XT. Trên cung $TS$ không chứa A, B lấy một điểm C. Kẻ tiếp tuyến CY với $k_2$ $(Y \in k_2)$ sao cho đoạn CY không cắt đoạn ST. Gọi I là giao điểm của XY và SC. Chứng minh rằng :

a) C, T, Y, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) I là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với cạnh BC.

2. Cho P là một tứ giác nội tiếp đường tròn ω. Gọi Q là tứ giác có bốn đỉnh, mỗi đỉnh là tâm của đường tròn tiếp xúc trong với ω và hai đường chéo của P.

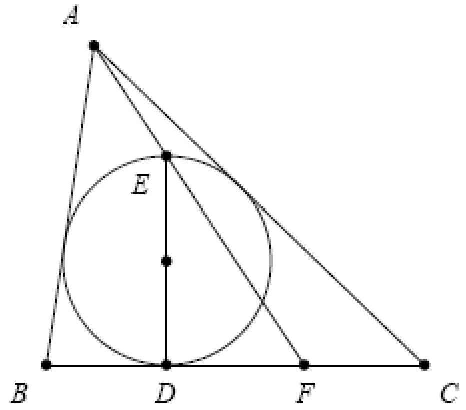
Chứng minh các tâm đường tròn nội tiếp của bốn tam giác có các cạnh và đường chéo của P tạo thành một hình chữ nhật nội tiếp trong Q.

3. ***[Romania 1997].*** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\omega$, D là một điểm nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng đường tròn tiếp xúc với $\omega$, AD và BD, và đường tròn tiếp xúc với $\omega$ AD và DC tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $BAD = CAD.$
4. ***[Romania TST 2006].*** Cho tam giác ABC, $AB \neq AC,$ nội tiếp đường tròn $\omega$, đường cao AD. Gọi $\omega_1$ là đường tròn tiếp xúc với DA, DB và $\omega$. Gọi $\omega_2$ là đường tròn tiếp xúc với DA, DC và $\omega$. Gọi *l* là tiếp tuyến chung trong khác CD của $\omega_1$ và $\omega_2$. Chứng minh *l* đi qua trung điểm BC khi và chỉ khi $2BC = AB + AC.$
5. ***[AMM 10368].*** Với mỗi điểm O nằm trên đường kính AB của đường tròn. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt đường tròn tại P. Đường tròn $\omega_1$ tiếp xúc với đường tròn trên và với OP, AO. Đường tròn $\omega_2$ tiếp xúc với đường tròn trên và với OP, BO. Gọi R, S là điểm tiếp xúc của $\omega_1$, $\omega_2$ trên AB. Chứng minh rằng số đo góc $RPS$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

## B. CÁC BỔ ĐỀ HỌC SINH TỰ LUYỆN.

### I. Đường kính của đường tròn nội tiếp.

***Bổ đề 1***: Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D; DE là đường kính. Gọi F là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng $BD = CF$.




***Lời giải*** : Xét phép vị tự tâm A biến đường tròn $\omega$ nội tiếp tam giác ABC thành đường tròn $\omega_A$ bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Qua phép vị tự này DE biến thành đường kính của $\omega_A$ và vuông góc với BC. Suy ra E biến thành điểm tiếp xúc của $\omega_A$ với BC và E biến thành F. Từ đó dễ dàng có $BD = CF$.

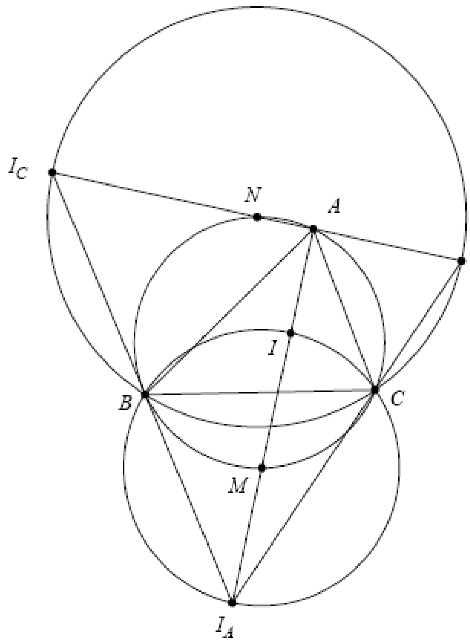
**Bài tập áp dụng:**

1. ***[IMO Shortlist 2005].*** Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB + BC = 3AC,$ đường tròn nội tiếp tam giác ABC với là tâm I, tiếp xúc với AB, BC tại D, E tương ứng. Gọi K, L là điểm đối xứng của D, E tương ứng qua I. Chứng minh ACKL là tứ giác nội tiếp.
2. ***[IMO 1992].*** Trong mặt phẳng cho một đường tròn (C) và một đường thẳng *l* tiếp xúc với (C). M là một điểm nằm trên *l*. Tìm quĩ tích tất cả các điểm P sao cho tồn tại hai điểm Q, R trên *l* sao cho M là trung điểm QR và (C) là đường tròn nội tiếp tam giác PQR.
3. ***[USAMO 1999].*** Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Đường tròn nội tiếp $\omega$ của tam giác BCD tiếp xúc với CD tại E. Gọi F là một điểm nằm trên phân

giác trong của $DAC$ sao cho $EF \perp CD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt CD tại C và G. Chứng minh rằng tam giác AFG cân.

4. ***[USAMO 2001].*** Cho tam giác ABC và đường tròn $\omega$ nội tiếp nó, tiếp xúc với BC, AC tại $D_1$, $E_1$ tương ứng. Gọi $D_2$, $E_2$ là các điểm nằm trên các cạnh BC, AC tương ứng sao cho $CD_2 = BD_1, CE_2 = AE_1$. Gọi P là giao điểm của $AD_2$ và $BE_2$. Đoạn $AD_2$ cắt $\omega$ tại hai điểm, trong đó gọi Q là điểm gần A hơn. Chứng minh $AQ = D_2P$.
5. ***[Tournament of Towns 2003 Fall].*** Cho tam giác ABC với trực tâm là H, tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tròn ngoại tiếp O. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại K. Giả sử IO // BC. Chứng minh AO // HK.
6. ***[IMO 2008].*** Cho tứ giác lồi ABCD ($AB \neq CD$). Gọi $\omega_1, \omega_2$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ADC tương ứng. Giả sử rằng tồn tại mmọt đường tròn $\omega$ tiếp xúc với tia BA kéo dài về phía A và tia BC kéo dài về phía C và cũng tiếp xúc với AD, CD. Chứng minh rằng giao điểm các tiếp tuyến chung ngoài của $\omega_1, \omega_2$ nằm trên $\omega$.

**II. Trung điểm cung cách đều các đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp**




***<u>Bổ đề 2:</u>*** Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp, $I_A, I_B, I_C$ là tâm đường tròn bàng tiếp tương ứng với các góc A, B, C của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cung BC không chứa A, N là trung điểm cung BC chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó ta có: $MB = MC = MI = MI_A$ và $NB = NC = NI_B = NI_C$.

***Lời giải:*** (Đây là bổ đề Masion chứng minh chỉ cần sử dụng tính góc trực tiếp để được các tam giác cân từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau. Hơn nữa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn chín điểm của tam giác $I_AI_BI_C$.)\

**Bài tập áp dụng:**

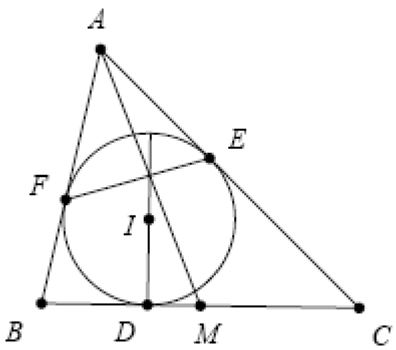
1. ***[APMO 2007].*** Cho tam giác ABC nhọn, $BAC = 60^0, AB > AC$. Gọi I, H là tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $2AHI = 3ABC$.

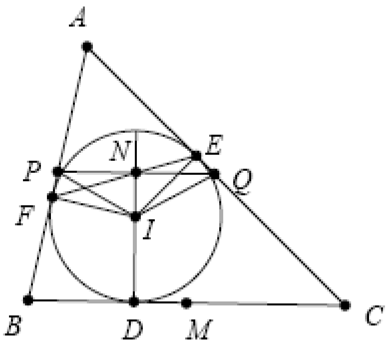
2. ***[IMO 2006].*** Cho tam giác ABC, tâm đường tròn nội tiếp là I. P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $PBA + PCA = PBC + PCB.$ Chứng minh rằng $AP \geq AI$. Đẳng thức xảy ra khi nào?
3. Trên hai cung AB, BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lấy các điểm K, L tương ứng sao cho $KL // AC.$ Chứng minh rằng các tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK, CKL cách đều trung điểm cung $ABC.$
4. ***[Romanian TST 1996].*** Cho tứ giác nội tiếp ABCD. Gọi M là tập hợp gồm 16 điểm là tâm đường tròn nội tiếp và các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh tồn tại hai tập hợp K và L mỗi tập hợp gồm 4 đường thẳng song song sao cho $K \cup L$ có chứa chính xác 4 điểm của M.

## III. Các đường thẳng đồng qui từ đường tròn nội tiếp.

***Bổ đề 3***: Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F tương ứng. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó EF, DI, AM đồng qui.

***Lời giải:***




Đường thẳng DI và EF cắt nhau tại N. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại P, Q tương ứng. Để chứng tỏ rằng A, N, M thẳng hàng, ta sẽ chứng minh N là trung điểm PQ.

***Cách 1:*** (Sử dụng đường thẳng Simson).

Xét tam giác APQ. Hình chiếu của điểm I trên các cạnh của tam giác APQ F, N, E thẳng hàng suy ra I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ (theo định lí Sínon). Mà AI là phân giác $PAQ$ suy ra $PI = IQ$ do đó $PN = NQ \Rightarrow M \in AN.$

***Cách 2:*** (Sử dụng tam giác đồng dạng).

Chú ý rằng P, N, I, F cùng nằm trên một đường tròn, do đó $EFI = QPI$. Tương tự $PQI = FEI$. Suy ra tam giác IFE đồng dạng với tam giác IPQ, từ đó ta được $IP = IQ \Rightarrow N$ là trung điểm PQ.

**Bài tập áp dụng**

**1.[China 1999].** Cho tam giác ABC, $AB \neq AC,$ Dlà trung điểm cạnh BC, E là một điểm thuộc đoạn AD. Kẻ $EF \perp BC, F \in BC.$ Gọi P là một điểm thuộc đoạn EF. Kẻ $PM \perp AB, PN \perp AC, M \in AB, N \in AC.$ Chứng minh rằng M, E, N thẳng hàng khi và chỉ khi $BAP = PAC.$

**2.[IMO Shortlist 2005].** Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt đường tròn nội tiếp $\omega$ của tam giác ABC tại K, L. Qua K, L kẻ các đường thẳng song song với BC cắt $\omega$

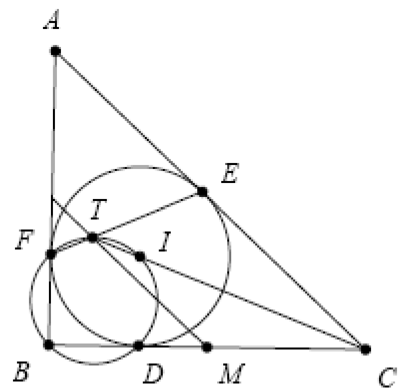
tại X, Y tương ứng. CÁc đường thẳng Ã, AY cắt BC tại P, Q tương ứng. Chứng minh rằng $BP = CQ.$

**IV. Các đường tròn xung quanh đường tròn nội tiếp.**

***Bổ đề 4:*** Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với CB, CA, AB tại D, E, F tương ứng. T là giao điểm cua CI và EF. Khi đó T, I, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn. Đồng thời T nằm trên đường thẳng nối trung điểm AB và BC.

***Lời giải:*** Xét trường hợp trường hợp T nằm trong đoạn EF (trường hợp T nằm ngoài đoạn EF chứng minh tương tự).

Ta có $BIC = BFE \ (=90^0 + A/2)$, suy ra bốn điểm I, T, F, B cùng nằm trên mmọt đường tròn. Suy ra $BTC = BTI = BFI = 90^0$ do đó các điểm T, I, D, B, F cùng nằm trên mmọt đường tròn. Trong tam giác BTC vuông tại T và M là trung điểm Bc suy ra TM = MC, do đó $MTC = MCT = TCA \Rightarrow MT // AC$. Suy ra MT đi qua trung điểm AB.



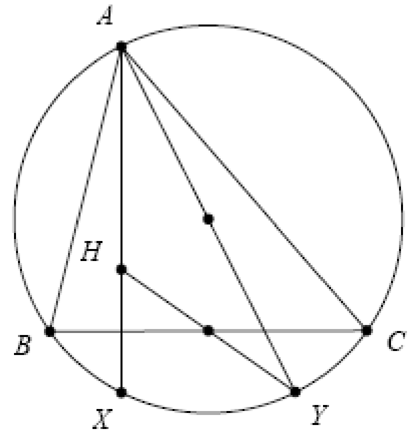

**Bài tập áp dụng**

1. Đường tròn nội tiếp tam giác nhọn ABC, tiếp xúc với Ac, AB tại E, F tương ứng. Phân giác của góc $ABC$ và $ACB$ cắt EF tại X, Y tương ứng. Gọi Z là trung điểm BC. Chứng minh rằng tam giác XYZ là tam giác đều khi và chỉ khi $BAC = 60^0.$
2. ***[IMO Shortlist 2004].*** Cho tam giác ABC Gọi X là một điểm thay đổi nằm trên đường thẳng BC sao cho C nằm giữa B và X và đường tròn nội tiếp tam giác ABX và ACX cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định không phụ thuộc vào cách chọn điểm X.
3. Cho hai điểm A, B nằm trên đường tròn $\omega$ và C là một điểm nằm trong đường tròn $\omega$. Giả sử rằng Ω là một đường tròn tiếp xúc với $\omega$ và với các đoạn CA, CB. Ω tiếp xúc với CA, CB tại P, Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

**V. Đối xứng của trực tâm nằm trên đường tròn nội tiếp**

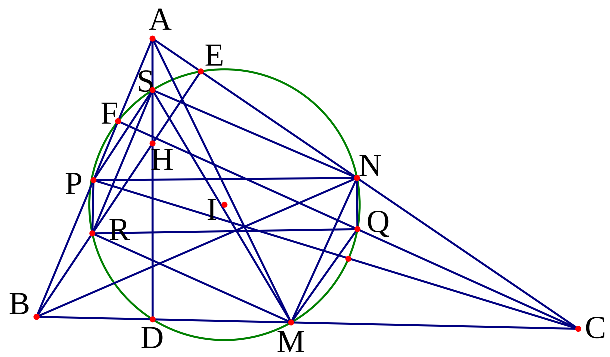
***Bổ đề 5:*** Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. X là điểm đối xứng của H qua BC, Y là điểm đối xứng của H qua trung điểm BC. Khi đó X, Y đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ngoài ra AY là đường kính của đường tròn này.

***Lời giải:*** (Sử dụng góc)




**Mở rộng: (Đường tròn Euler)**

Cho tam giác $ABC$ có đường cao $AD, BE, CF$ đồng quy tại $H$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$; $S, R, Q$ lần lượt là trung điểm của $HA, HB, HC$. Chứng minh rằng chin điểm $D, E, F, M, N, P, S, R, Q$ cùng nằm trên một đường tròn.




Trong tam giác $ABH$ thì $PR$ là đường trung bình nên $PR//AH$ và $PR = \frac{1}{2}AH$.

Trong tam giác $ACH$ thì $NQ$ là đường trung bình nên $NQ//AH$ và $NQ = \frac{1}{2}AH$. Do đó $PR//NQ$ và $PR = NQ$ nên $PNQR$ là hình bình hành. Mặt khác $PR//AH$ mà $AH \perp BC$ nên $PR \perp BC$, lại có $PN//BC$ ($PN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$). Suy ra $PN \perp PR$, do đó $PNQR$ là hình chữ nhật. Gọi $I$ là giao điểm của $PQ$ và $RN$ thì $IP = IN = IR = IQ$. Chứng minh tương tự ta có $IS = IM = IN = IR$. Ta được $IP = IQ = IN = IR = IS = IM$.

Tam giác $FPQ$ vuông tại $F$ có $I$ là trung điểm của $PQ$ nên $IF = IP = IQ$. Tương tự $IE = IR = IN$; $ID = IS = IM$. Suy ra $ID = IE = IF = IM = IN = IP = IS = IR = IQ$. Vậy chín điểm $D, E, F, M, N, P, S, R, Q$ cùng nằm trên đường tròn tâm $I$. Đường tròn đi qua chín điểm được gọi là đường tròn Euler của tam giác $ABC$.

**Chú ý:**

a) Tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler.

Thật vậy, gọi $G$ và O theo thứ tự là trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Ta chứng minh được $OM = \frac{1}{2}AH = SH$, lại có $OM//SH \Rightarrow OMHS$ là hình bình hành. Mà $I$ là trung điểm của $SM$ nên cũng là trung điểm của $OH$.

Như vậy bốn điểm $H, I, O, G$ thẳng hàng, tứ là tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler.

b) Bán kính đường tròn Euler bằng $\frac{R}{2}$ (vói $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$). Thật vậy, ta có $IS$ là đường trung bình của $\Delta AHO$ nên $IS = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

**Bài tập áp dụng**

1. Cho tam giác ABC, P là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng điểm đối xứng với điểm P qua các cạnh của tam giác ABC nằm trên một đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC.
2. ***[IMO Shortlist 2005].*** Cho tam giác ABC nhọn, $AB \neq AC,$ H là trực tâm của tam giác, M là trung điểm cạnh BC. CÁc điểm D, E nằm trên các cạnh AB, AC tương ứng sao cho $AE = AD,$ và D, H, E thẳng hàng. Chứng minh rằng HM vuông góc với dây cung chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác ADE.
3. ***[USA TST 2005].*** Cho tam giác $A_1B_1C_1$ nhọn, tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, với $1 \le i \le 3,$ chọn $P_i \in OA_i$, $Q_i \in A_{i+1}A_{i+2}$ (chỉ số lấy theo *mod3*) sao cho $OP_iHQ_i$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $\frac{OQ_1}{OP_1} + \frac{OQ_2}{OP_2} + \frac{OQ_3}{OP_3} \ge 3.$
4. ***[China TST 2006].*** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\omega$ và P là một điểm nằm trong tam giác. Các tia AP, BP, CP cắt $\omega$ tại $A_1, B_1, C_1$ tương ứng. Gọi $A_2, B_2, C_2$ là các điểm đối xứng của $A_1, B_1, C_1$ qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ đi qua trực tâm của tam giác ABC.

## VI. Tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H.

***<u>Bổ đề 10:</u>*** Cho tam giác ABC, Tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H và tâm đường tròn nội tiếp I. Khi đó AI là phân giác $HAO$.

***<u>Lời giải</u>***: (Sử dụng góc).

**Bài tập áp dụng**

1. ***[Crux].*** Cho tam giác ABC nhọn, tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H,. Trung trực của AH cắt AB, AC tại D, E tương ứng. Chứng minh rằng $DOA = EOA.$
2. Chứng minh rằng $IH = IO$ khi và chỉ khi có một trong ba góc $A, B, C,$ bằng $60^0$.

## 4. KẾT QUẢ - KẾT LUẬN

### a. Kết quả:

Qua năm học 2019 – 2020, áp dụng cho lớp 10 Toán và đội tuyển học sinh giỏi môn Toán lớp 10 của nhà trường dưới sự hướng dẫn của giáo viên kết hợp thảo luận trao đổi với nhau của học sinh. Kết quả, học sinh tích cực tham gia giải bài tập, nhiều em tiến bộ, nắm vững kiến thức cơ bản, học sinh đã hứng thú hơn với các bài toán hình học phẳng trong các đề thi. Cụ thể như sau:

**Thống kê điểm kiểm tra khảo sát chuyên đề hình học phẳng:**

**Bảng thống kê kết quả đánh giá năng lực học sinh khi áp dụng SKKN**

**Trước khi áp dụng SKKN**

| Đối tượng | Số lượng | 0-3,25 | 3,5-4,75 | Tổng cộng | Tỷ lệ % | 5,0-6,25 | 6,5-7,75 | 8,0-10 | Tổng cộng | Tỷ lệ % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Đội tuyển HSG | 25 | 7 | 10 | 17 | 68% | 5 | 3 | 0 | 8 | 32% |

**Sau khi áp dụng SKKN**

| Đối tượng | Số lượng | 0-3,25 | 3,5-4,75 | Tổng cộng | Tỷ lệ % | 5,0-6,25 | 6,5-7,75 | 8,0-10 | Tổng cộng | Tỷ lệ % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Đội tuyển HSG | 25 | 0 | 6 | 6 | 24% | 7 | 7 | 5 | 19 | 76% |

Sáng kiến kinh nghiệm này được áp dụng dạy cho đội tuyển thi chọn HSG cấp tỉnh và cấp Quốc gia trong năm học 2019-2020 đạt hiệu quả, học sinh đã biết cách sử dụng bổ đề như là một công cụ để giải toán hình học phẳng. Sáng kiến kinh nghiệm là chuyên đề được sử dụng trong việc bồi dưỡng học sinh năng khiếu.

### b. Kết luận

Trên đây tôi đã trình bày cách dùng bài toán chìa khóa để giải toán hình học phẳng, qua đó hy vọng sẽ giúp học sinh có cách tư duy tìm lời giải bài toán hình học phẳng tốt hơn. Với lượng kiến thức trên còn phải bổ sung rất nhiều, tuy nhiên thông qua các ví dụ đã trình bày phần nào cũng đã hình thành được những kĩ năng cơ bản trong việc giải toán trong hình học phẳng. Do thời gian và trình độ chuyên môn còn hạn chế, bài viết chắc chắn sẽ còn nhiều thiếu sót về nội dung cũng như cách trình bày, rất mong nhận được sự đóng góp của các thầy cô giáo. Tôi xin chân thành cảm ơn.

*Lào Cai, tháng 03 năm 2020*

**Giáo viên**

**Cao Thị Hồng Tuyết**

**Tài liệu tham khảo**


1. Tuyển tập các đề thi Toán Quốc gia và Quốc tế.
2.Tạp chí toán học tuổi trẻ
3. Các bài toán hình học phẳng V.VPRXOLOV
4 .Chuyên đề các định lý cổ điển.
5. Tham khảo các chuyên đề trong hội thảo các trường chuyên miền Duyên Hải Bắc Bộ.
6. Địa chỉ Webside.” Mathscope.org”.