PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC VÀ ĐẠI SỐ

Bùi Ngọc Diệp

Trường Trung học phổ thông Chuyên Lào Cai

Trong chương trình trung học phổ thông, chúng ta được bắt đầu làm quen với các kiến thức trong giải tích từ lớp 11. Đây là một chủ đề khó với những định nghĩa, định lí tương đối trừu tượng đối với các bạn học sinh. Số học, Đại số và Giải tích là những ngành tưởng chừng tách rời nhau nhưng chúng lại những mối quan hệ hết liên kết hết sức chặt chẽ. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ xét các bài toán mà phát biểu của chúng có vẻ là đại số hoặc số học thuần túy (hoặc cả hai), nhưng trong lời giải phương pháp giải tích đóng vai trò cốt yếu. Chuyền đề này sẽ giúp học sinh nhìn thấy "sợi dây liên kết" giữa Đại số, Số học và Giải tích, đồng thời củng cố, đào sâu những kiến thức liên quan.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC

Chúng ta sẽ bắt đầu với bài toán về phương trình với phần nguyên toán trong đề kiểm tra Đội tuyển của tỉnh Vĩnh Phúc năm 2017.

Bài toán 1. . *Phần nguyên của số thực x được định nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x được kí hiệu là $[x]$. Hiệu $x-[x]$ được gọi là phần lẻ của x và được kí hiệu là $\{x\}$. Hãy xác định tất cả các bộ ba số thực dương a, b, c sao cho*

$$[na]\cdot[nb]=\left[n^2c\right]. \tag{1.1}$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Lời giải. Trước hết ta sẽ chứng minh bổ đề sau
Bổ đề. Nếu x và y là các số thực thì

$$\{x+y\}=\{x\}+\{y\}$$

với $0\le\{x\}+\{y\}<1$.

Chứng minh bổ đề. Từ công thức

$$a=[a]+\{a\},\forall a\in\mathbb{R},$$

ta có

$$[x+y]=\left[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}\right]. \tag{1.2}$$

Đặt

$$a=[x]+[y],b=\{x\}+\{y\}.$$

thì $a \in \mathbb{Z}$ và $b \in \mathbb{R}, 0 \leq b < 1$. Từ đó, ta suy ra

$$a \leq a + b < a + 1.$$

Kết hợp với $a \in \mathbb{Z}$, ta được

$$[a+b] = a,$$

điều này tương đương với

$$\big[[x] + [y] + \{x\} + \{y\}\big] = [x] + [y]. \tag{1.3}$$

Từ (1.2) và (1.3), ta có

$$[x+y] = [x] + [y],$$

do đó

$$x + y - [x+y] = x - [x] + y - [y].$$

Điều này suy ra

$$\{x+y\} = \{x\} + \{y\}.$$

Như vậy, bổ đề được chứng minh.

Quay trở lại bài toán. Từ đẳng thức (1.1) của bài toán, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\big(na - \{na\}\big) \cdot \big(nb - \{nb\}\big) = n^2c - \big\{n^2c\big\}.$$

Điều này tương đương với

$$n^2ab - na\{nb\} - nb\{na\} + \{na\}\{nb\} = n^2c - \big\{n^2c\big\}. \tag{1.4}$$

Chia cả hai vế của đẳng thức trên cho n^2, ta được

$$ab - \frac{a\{nb\}}{n} - \frac{b\{na\}}{n} + \frac{\{na\}\{nb\}}{n^2} = c - \frac{\big\{n^2c\big\}}{n^2}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(ab - \frac{a\{nb\}}{n} - \frac{b\{na\}}{n} + \frac{\{na\}\{nb\}}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(c - \frac{\big\{n^2c\big\}}{n^2}\right).$$

Do đó, ta được

$$ab = c^2.$$

Với điều kiện này, (1.4) trở thàn

$$na\{nb\} + nb\{na\} - \{na\}\{nb\} = \big\{n^2c\big\}.$$

Chia hai vế của đẳng thức này cho n rồi lấy giới hạn khi $n \to +\infty$, ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\big(a\{nb\} + b\{na\}\big) = 0. \tag{1.5}$$

Vì a, b là các số thực dương nên

$$\{na\} > 0, \{nb\} > 0.$$

Do đó

$$0 < \{na\} < \frac{1}{b}\left(a\{nb\} + b\{na\}\right).$$

Chú ý rằng

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b}\left(a\{nb\} + b\{na\}\right) = 0.$$

Theo định lý về giới hạn kẹp thì từ (1.5) suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \{na\} = 0.$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\lim_{n\to\infty} \{nb\} = 0.$$

Giả sử $\{a\} \neq 0$, khi đó ta có

$$0 < \{a\} < 1.$$

Đặt

$$\varepsilon = \min\left\{1 - \{a\}, \{a\}\right\}$$

thì $\varepsilon > 0$. Vì $\lim_{n\to\infty}\{na\} = 0$ nên theo định nghĩa giới hạn của dãy số tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $0 \leq \{na\} < \varepsilon$. Từ đây, ta suy ra

$$0 \leq \{n_0 a\} < \varepsilon, \quad 0 \leq \left\{(n_0 + 1)\, a\right\} < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Vì a là số thực dương và từ định nghĩa của ε ta được

$$0 < \{a\} \leq \{a\} + \{n_0 a\} < \{a\} + \varepsilon \leq 1$$

Khi đó, áp dụng bổ đề trên ta được

$$\left\{(n_0 + 1)\, a\right\} = \{n_0 a + a\} = \{a\} + \{n_0 a\}$$

Từ (1.6), ta suy ra

$$\varepsilon > \{a\} + \{n_0 a\} \geq \{a\}$$

Điều này là mâu thuẫn với định nghĩa ε. Do đó điều giả sử là sai, hay $\{a\} = 0$, tức $a \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh tương tự, ta được $b \in \mathbb{N}^*$. Đảo lại, nếu a, b là các số nguyên dương và $c = ab$ thì ta có ngay

$$[na] \cdot [nb] = \left[n^2 c\right].$$

Vậy các bộ ba cần tìm gồm

$$a \in \mathbb{N}^*, \quad b \in \mathbb{N}^* \quad \text{và} \quad c = ab.$$

Nhận xét.

(1) Bài toán trên là bài toán "số học-giải tích" hay và độc đáo. Bài toán chỉ sử dụng định nghĩa giới hạn của giới hạn dãy số kết hợp với tính chất của hàm phần nguyên nhưng "lạ", gây ít nhiều khó khăn cho các học sinh khi đứng trước bài toán này. Bổ đề được sử dụng trong chứng minh bài toán là các tính chất quen thuộc của hàm phần nguyên. Khi phát hiện được

$$\lim_{n\to\infty}\{na\}=0,\ \lim_{n\to\infty}\{nb\}=0,$$

ta sẽ nghĩ ngay đến việc sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy số "Số a được gọi là giới hạn của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ nếu với $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n\ge n_0$ ta có $|u_n-a|<\varepsilon$". để giải quyết bài toán. Muốn chứng minh $a\in\mathbb{N}^*, b\in\mathbb{N}^*$ ý tưởng rất tự nhiên đó là chứng minh phần lẻ của chúng bằng 0. Sự tinh tế ở lời giải trên đó chính là việc chọn

$$\varepsilon=\min\left\{1-\{a\},\{a\}\right\}.$$

(2) Để chứng minh $a\in\mathbb{N}^*, b\in\mathbb{N}^*$ ta có cách tiếp cận khác với lời giải trên, dựa vào biểu diễn thập phân của số vô tỉ như sau Giả sử a là số vô tỉ. Khi đó trong biểu diễn thập phân ta có

$$a=(C,c_1c_2\dots)_{10}=C+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{10^i}$$

tồn tại chữ $c\neq 0$ xuất hiện vô hạn lần; tức là tồn tại các chỉ số

$$i_1<i_2<\dots$$

sao cho

$$c=c_{i_1}=c_{i_2}=\dots.$$

Xét $n=10^{i_k-1}$ thì $n\to\infty$ khi k tiến ra vô cùng, ta có

$$na=\left(Cc_1\dots c_{i_k-1},c_{i_k}\dots c_{i_{k+1}}\dots\right)_{10}.$$

Khi đó, ta được

$$\{na\}>(0,c)_{10}=\frac{c}{10}>0.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\{na\}>0,$$

điều này là vô lý. Như vậy, điều giả sử là sai hay a là số hữu tỉ. Khi đó

$$a=\frac{p}{q}\text{ vói }p,q\in\mathbb{N}^*.$$

Xét $n=kq+1$ thì $n\to\infty$ khi k tiến ra vô cùng. Ta có

$$\{na\}=\{kp+a\},$$

theo bổ đề thì
$$\{kp + a\} = \{a\}.$$
Từ đó, ta được
$$\lim_{n\to\infty} \{na\} = \lim_{n\to\infty} \{a\} = 0 \Rightarrow \{a\} = 0,$$
do đó $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, $b \in \mathbb{N}^*$.

(3) Dưới đây là một số bài toán tương tự

Bài toán 1. (Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán (VMO) năm 2016)
(a) Cho dãy số (a_n) được xác định bởi
$$a_n = \ln\left(2n^2 + 1\right) - \ln\left(n^2 + n + 1\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$
Chứng minh rằng, chỉ có hữu hạn số n sao cho
$$\{a_n\} < \frac{1}{2}.$$
(b) Cho dãy số (b_n) được xác định bởi
$$b_n = \ln\left(2n^2 + 1\right) + \ln\left(n^2 + n + 1\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Chứng minh tồn tại vô hạn số n sao cho
$$\{b_n\} < \frac{1}{2016}.$$
Trong đó $\{x\}$ là ký hiệu phần lẻ của số thực x :
$$\{x\} = x - [x].$$
Bài toán 2. (Đề thi Olympic Toán học Sinh viên Toàn Quốc năm 2016)
Phần nguyên của số thực x được định nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x được kí hiệu là $[x]$. Hiệu $x - [x]$ được gọi là phần lẻ của x và được kí hiệu là $\{x\}$. Giả sử a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\lim_{n\to\infty} \left(a\{nb\} + b\{na\}\right) = 0$$
khi và chỉ khi a và b là các số nguyên.

Bài toán 2. Giả sử a, b, $c \in \mathbb{Z}$ sao cho
$$f(n) := an^2 + bn + c$$
là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại α, β sao cho
$$f(n) = (\alpha n + \beta)^2$$
với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta thấy rằng tồi tại dãy số tự nhiên $\{a_n\}_{n\geq 1}$ sao cho

$$f\left(n\right) = a_n^2. \tag{1.7}$$

với mọi số nguyên dương n. Khi đó, ta được

$$an^2 + bn + c = a_n^2.$$

Đẳng thức trên suy ra

$$a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} = \frac{a_n^2}{n^2}.$$

Do đó, ta có

$$a = \lim_{n\to+\infty}\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n^2}{n^2}\right) \geq 0. \tag{1.8}$$

Vậy $a \geq 0$. Ta xét các trường hợp sau.
Trường hợp 1: $a = 0$. Khi đó, ta có

$$f(n) = bn + c.$$

Nếu $b \neq 0$ thì $f(n) < 0$ khi n trái dấu với b và có trị tuyệt đối đủ lớn, mâu thuẫn với (1.7). Vậy $b = 0$, còn $c \in \mathbb{N}$ là một số chính phương ($a_n = \sqrt{c}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$). Trong trường hợp này, điều phải chứng minh là đúng với $\alpha := 0$, $\beta := \sqrt{c}$.
Trường hợp 2: $a \neq 0$. Khi đó, ta có $a > 0$. Từ (1.8), ta suy ra tồn tại số nguyên dương $n_0 > 0$ sao cho $a_n > 0$ với mọi số nguyên dương $n \geq n_0$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1} - a_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} + a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n+1) - f(n)}{\sqrt{f(n+1)} + \sqrt{f(n)}}.$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} f\left(n+1\right) - f\left(n\right) &= \left[a(n+1)^2 + b\left(n+1\right) + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right] \\ &= 2an + a + b. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(n+1\right) - f\left(n\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2an + a + b}{n} = 2a.$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(n\right)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(n+1\right)}{n^2} \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\left(n+1\right)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(n+1\right)}{n^2}. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta được

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n}}{\sqrt{\dfrac{f(n+1)}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{f(n)}{n^2}}} = \frac{2a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

Vì $a_{n+1}-a_n$ chỉ nhận giá trị nguyên, ta suy ra

$$\alpha := \sqrt{a} \in \mathbb{N}^*$$

và tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (đủ lớn) để $a_{n+1}-a_n=\alpha$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Với các giá trị n đó cùng với các kết quả ở trên ta có

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 n+\alpha^2+b &= 2an+a+b \\ &= a_{n+1}^2-a_n^2 \\ &= (\alpha+a_n)^2-a_n^2 \\ &= \alpha^2+2\alpha a_n. \end{aligned}$$

Đẳng thức này suy ra

$$2\alpha | 2\alpha a_n - 2\alpha^2 n = b,$$

tức là $b=2\alpha\beta$ với $\beta\in\mathbb{Z}$ nào đó. Khi đó, ta được

$$2\alpha a_n - 2\alpha^2 n = b = 2\alpha\beta \Rightarrow a_n = \alpha n+\beta.$$

Điều này chứng tỏ

$$f(n)=a_n^2=(\alpha n+\beta)^2.$$

với mọi số tự nhiên $n\geq n_0$, và do đó, với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

Nhận xét.

(1) Trong bài toán trên, chúng ta đã vận dụng một cách "khéo léo" định nghĩa giới hạn của dãy số. Từ giả thiết của đề bài, chúng ta có thể dễ dằng nhận ra rằng $a\geq 0$. Hơn nữa, sử dụng ý tưởng tương tự khi chứng minh $a\geq 0$ trong bài toán trên, ta có thể chứng minh kết quả sau:
"Giả sử

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_nx+a_0$$

là đa thức một biến x bậc $n\geq 0$ với hệ số thực. Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=a_n$."
Kết quả $a_{n+1}-a_n=\alpha$ với mọi số tự nhiên $n\geq n_0$ là mấu chốt của bài toán. Để thu được kết quả này về bản chất ta đã sử dụng nhận xét sau đây về giới hạn của dãy số nguyên: "nếu dãy số nguyên $\{a_n\}_{n\geq 1}$ hội tụ về a thì tồn tại n_0 sao cho với mọi $n\geq n_0$ thì $a_n=a$," tức là "một dãy số nguyên có giới hạn hữu hạn thì dãy đó sẽ là dãy dừng kể từ một số hạng nào đó của dãy." Nhận xét có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến dãy số nguyên.

(2) Sử dụng phương pháp hoàn tương tự như bài toán trên ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau
"Cho $f(x)$ là đa thức bậc $k \geq 1$ thỏa mãn $f(n)$ là lũy thừa bậc k của một số tự nhiên với mỗi số nguyên dương n. Khi đó $f(x)$ là lũy thừa bậc k của một đa thức bậc nhất với hệ số nguyên."

Bài toán 3. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ đôi một khác nhau và số nguyên tố p thỏa mãn

$$a^p + b^p = c^p + d^p.$$

Chứng minh

$$|a-c| + |b-d| \geq p.$$

Lời giải. Vì p là số nguyên tố nên áp dụng định lý Fermat, ta được

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p},$$
$$b^p - b \equiv 0 \pmod{p},$$
$$c^p - c \equiv 0 \pmod{p},$$
$$d^p - d \equiv 0 \pmod{p}.$$

Kết hợp giả thiết và các kết quả trên, ta có

$$0 = (a^p - c^p) + (b^p - d^p) \equiv a - c + b - d \pmod{p}.$$

Điều này suy ra

$$a + b \equiv c + d \pmod{p}.$$

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: $a + b \neq c + d$. Vì a, b, c, d là các số đôi một khác nhau nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $a + b > c + d$. Khi đó, ta được

$$a - c + b - d = (a + b) - (c + d) > 0.$$

Do đó

$$|a-c| + |b-d| \geq |a - c + b - d| = a - c + b - d \geq p.$$

Trường hợp 2: $a + b = c + d$. Giả sử $a > c > d$ suy ra $b < d$ do đó $a > c > d > b$. Xét hàm số $f(t) = t^p$. Vì $f(t)$ có đạo hàm trên các khoảng (c, a) và (b, d) nên theo định lý Lagrange tồn tại các số $t_1 \in (c, a), t_2 \in (d, b)$ sao cho

$$f'(t_1) = \frac{f(a) - f(c)}{a - c} = \frac{a^p - c^p}{a - c}$$

và

$$f'(t_2) = \frac{f(d) - f(b)}{d - b} = \frac{d^p - b^p}{d - b}.$$

Do đó $f'(t_1) = f'(t_2)$. Điều này là vô lí vì p nguyên tố và t_1, t_2 thuộc hai khoảng khác nhau.

Nhận xét.

(1) Khi nhìn thấy giả thiết của bài toán, chúng ta sẽ nghĩ ngay đến việc "làm thế nào có thể hạ thấp số bậc" của đẳng thức đã cho. Rất "may", p là số nguyên tố. Vì vậy chúng ta có thể dùng một trong những định lí "kinh điển" trong số học, đó là định lí Fermat. Sau khi thu được kết quả

$$a + b \equiv c + d \pmod p$$

sẽ có rất nhiều bạn "vội vàng" đưa ra kết luận của bài toán mà không để ý tới trường hợp

$$(a + b) - (c + d) = 0.$$

Việc sử dụng định lý Lagrange trong trường hợp 2 là "tự nhiên". Ngoài ra, chúng ta có thể sự dụng tích phân để đưa ra được kết luận ở trường hợp 2. Cụ thể, từ đẳng thức

$$a^p - c^p = d^p - b^p,$$

ta suy ra

$$\int\limits_c^a x^{p-1}dx = \int\limits_b^d x^{p-1}dx.$$

Điều này là vô lý vì $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ đôi một khác nhau và $(b, d) \subset (c, a)$.

(2) Một câu hỏi được đặt ra là liệu kết quả của bài toán vẫn đúng nếu ta thay số nguyên tố p bởi một số nguyên n bất kì. Câu hỏi này xin dành cho bạn đọc.

Một ứng dụng của phương pháp giải tích trong vấn đề tìm đa thức với hệ số nguyên sẽ xuất hiện trong bài tiếp theo.

Bài toán 4. (Đề thi Olympic Toán của Bungari năm 2003)
Tìm tất cả các đa thức $P \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho phương trình

$$P(x) = 2^n$$

có ít nhất một nghiệm $x_n \in \mathbb{N}^*$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.
Từ giả thiết, ta thấy rằng

$$P(x) \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

trong đó

$$m := \deg P \in \mathbb{N}^*, (a_i)_{i=0}^m \subset \mathbb{Z}, a_m > 0$$

và dãy $(x_n)_{n=n_1}^{+\infty}$ tăng ngặt với $n_1 \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Hơn nữa,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

và
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^m}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^m}{P\left(x_n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_m+\sum_{i=0}^{m-1}a_ix_n^{i-m}}=\frac{1}{a_m}.$$
Từ đó, ta được
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}^m/2^{n+1}}{x_n^m/2^n}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2^{1/m},$$
nên (theo bất đẳng thức TBC-TBN, dấu "$=$ "không xảy ra)
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)=2^{1/m}+2^{-1/m}>2.$$
Vậy tồn tại số nguyên dương $n_2\geq n_1$ sao cho
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}>2\Rightarrow x_{n+1}-x_n>x_n-x_{n-1}$$
khi $n>n_2$. Nhưng do $P\in\mathbb{Z}[x]$ ta có
$$\left(x_{n+1}-x_n\right)|\left(P\left(x_{n+1}\right)-P\left(x_n\right)\right)=2^{n+1}-2^n=2^n$$
nên $x_{n+1}-x_n$ là một lũy thừa của 2 với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Vì thế,
$$x_{n+1}-x_n\geq 2\left(x_n-x_{n-1}\right)\geq\cdots\geq 2^{n-n_2}\left(x_{n_2+1}-x_{n_2}\right)$$
khi $n>n_2$. Từ đó
$$x_{n+1}\geq x_n+2^{n-n_2}\left(x_{n_2+1}-x_{n_2}\right)>2^{n-n_2},\quad\forall n>n_2.$$
Vậy nếu $m>1$ thì sẽ có
$$\frac{1}{a_m}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}^m}{2^{n+1}}\geq\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{m(n-n_2)}}{2^{n+1}}=+\infty$$
Điều này là vô lý, mâu thuẫn chứng tỏ rằng $m=1$, nghĩa là
$$P(x)=a_1x+a_0.$$
Bởi vì $a_1|a_1x_n=2^n-a_0\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, ta thấy
$$0<a_1|\left(2^2-a_0\right)-\left(2^1-a_0\right)=2.$$
Dễ dàng thử lại để đi đến kết luận sau

1. $a_1=1$ và $P(x)\equiv x+a_0$ với $a_0\in\mathbb{Z},a_0\leq 1$, hoặc
2. $a_1=2$ và $P(x)\equiv 2x+a_0$ với $a_0=2b,b\in\mathbb{Z},b\leq 0$.

Để kết thúc phần 2, ta sẽ đến với bài toán sau là bài toán số 6 trong đề thi chọn Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán Quốc tế (VN TST) năm 2005.

Bài toán 5. (VN TST 2005)

Một số nguyên dương được gọi là "số kim cương 2005" nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. $(a_n)\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn $a_n < nC$ (C là hằng số thực dương nào đó).

Chứng minh rằng dãy số $(a_n)\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ chứa vô hạn "số kim cương 2005".

Lời giải. Để chứng minh bài toán, trước hết ta cần chứng minh các bổ đề sau.
Bổ đề 1

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Chứng minh bổ đề 1. Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$x > \ln(x+1), \forall\ x > 0.$$

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = x - \ln(x+1), x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0, \forall x > 0.$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra

$$f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x > \ln(x+1), \forall x > 0.$$

Trong bất đẳng này, thay x bởi $\frac{1}{x} > 0$ ta cũng có

$$\frac{1}{x} > \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x, \forall x > 0.$$

Áp dụng vào tổng cần chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} > \sum_{i=1}^{n} [\ln(n+1) - \ln(n)] = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1),$$

mà

$$\lim \big[\ln(n+1)\big] = +\infty$$

nên

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2. Nếu trong hệ cơ số m ($m \in \mathbb{N}, m > 1$): dãy số (a_n) tăng và trong dãy đó không có số hạng nào có chứa chữ số $m-1$ thì tổng sau

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

hội tụ khi n tiến tới vô cùng.
Chứng minh bổ đề 2. Đặt

$$s_k = \sum \frac{1}{n}$$

là tổng các số tự nhiên có chứa k chữ số viết trong hệ cơ số m và không có chứa chữ số $m-1$ nào.
Giả sử một số hạng có k chữ số nào đó có dạng $\overline{b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k}$, chữ số thứ 1 phải khác 0 và khác $m-1$ nên có $m-2$ cách chọn, các chữ số còn lại phải khác $m-1$ nên có $m-1$ cách chọn. Do đó, có đúng $(m-2)(m-1)^{k-1}$ số có k chữ số mà trong biểu diễn trong hệ cơ số m không có chứa chữ số $m-1$, mà mỗi số trong đó đều lớn hơn m^{k-1} nên tổng nghịch đảo tương ứng của chúng sẽ bé hơn

$$\frac{(m-2)\cdot(m-1)^{k-1}}{m^{k-1}}.$$

Hơn nữa

$$s_k = \sum \frac{1}{n}$$

là tổng các số hạng có chứa k chữ số trong hệ số m và không có chứa chữ số $m-1$ nào nên nó không vượt quá tổng của tất cả các số tự nhiên có cùng dạng đó mà ta vừa đánh giá được, suy ra

$$s_k < \frac{(m-2)\cdot(m-1)^{k-1}}{m^{k-1}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \lim_{k=1}^{n} s_k < \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{(m-2)\cdot(m-1)^{k-1}}{m^{k-1}} \\
= \lim \sum_{k=1}^{n} (m-2)\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{k-1} \\
= \frac{m-2}{1-\frac{m-1}{m}} = m(m-2).
\end{aligned}$$

Tức là tổng này hội tụ khi n tiến tới vô cực. Bổ đề 2 được chứng minh.
Quay trở lại bài toán. Đặt $m = 10^{2005} \Rightarrow m-1$ là số tự nhiên có chứa đúng 2005 số 9 liên tiếp khi viết trong hệ thập phân. Ta cần chứng minh trong dãy đã cho, có vô số số hạng chứa chữ số $m-1$.
Giả sử trong dãy này không có chứa số hạng nào có chữ số $m-1$. Khi đó, theo bổ đề (2) ở trên

$$\lim_{i=1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

là hữu hạn. Hơn nữa, theo giả thiết $a_n < nC$, $\forall n$ nên

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{nC} = \frac{1}{C}\cdot \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

Theo bổ đề 1, giới hạn này tiến tới vô cực. Hai điều này mâu thuẫn với nhau chứng tỏ điều giả sử ở trên là sai, tức là dãy đã cho có ít nhất một số hạng chứa chữ số $m-1$, giả sử đó là a_{n_0}.

Ta lại xét dãy con của dãy ban đầu

$$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \ldots$$

Dãy này có đầy đủ tính chất của dãy đã cho nên cũng chứa ít nhất một số hạng có chứa chữ số $m-1$ khác với số a_{n_0} ở trên (do đây là dãy tăng). Lập luận tương tự như thế, dãy con này có thêm một số hạng có chứa chữ số $m-1$. Từ đó suy ra dãy đã cho có vô số số hạng chứa chữ số $m-1$. Vậy dãy số

$$(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$$

chứa vô hạn số kim cương 2005. Đây chính là điều phải chứng minh.

2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

Đầu tiên, chúng ta sẽ đến với ứng dụng của giải tích trong vấn đề chứng minh một phương trình đại số có nghiệm qua bài toán sau.

Bài toán 6. Giả sử hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện với $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f\left(x + \frac{2019}{2}\right)$$

là số hữu tỉ khi và chỉ khi

$$f(x+9) + f(x+4) + f(x+2019)$$

là số vô tỉ. Chứng minh rằng, phương trình sau có nghiệm thực

$$x^9 - 4x + 2019 - f(x) = 0.$$

Lời giải. Để chứng minh bài toán ta cần chứng minh bổ đề dưới dây.
Bổ đề. Nếu hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và chỉ nhận các giá trị vô tỉ thì $g(x) = c$ với c là một hằng số nào đó.

Chứng minh bổ đề. Thật vậy, nếu không như vậy thì tồn tại các cặp số thực phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sao cho $g(x_1) \neq g(x_2)$. Do tính chất liên tục của hàm g nên với số hữu tỉ

$$q \in \left(\min\left\{g(x_1), g(x_2)\right\}; \max\left\{g(x_1), g(x_2)\right\}\right)$$

cho trước, đều tồn tại $x_3 \in (x_1, x_2)$ để $g(x_3) = q$, điều này là không thể được vì g chỉ nhận giá trị vô tỉ. Vậy bổ đề được chứng minh.

Quay trở lại bài toán. Theo bài ra hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x\right)+f\left(x+\frac{2019}{2}\right)$$

là số hữu tỉ khi và chỉ khi

$$f\left(x+9\right)+f\left(x+4\right)+f\left(x+2019\right)$$

là số vô tỉ. Điều này tương đương với hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f\left(x+\frac{2019}{2}\right)$$

là số vô tỉ khi và chỉ khi với $x\in\mathbb{R}$, số

$$f(x+9)+f(x+4)+f(2019)$$

là số hữu tỉ. Do vậy, cặp hàm

$$\begin{cases} h_1(x)=f(x)+f\left(x+\dfrac{2019}{2}\right)+f(x+9)+f(x+4)+f(2019)\\ h_2(x)=f(x)+f\left(x+\dfrac{2019}{2}\right)-f(x+9)-f(x+4)-f(2019)\end{cases}$$

là các hàm liên tục và luôn nhận giá trị vô tỉ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy theo nhận xét ở trên thì $h_1\equiv c_1, h_2\equiv c_2$ (với c_1,c_2 là các hằng số vô tỉ nào đó).

Suy ra

$$f(x)+f\left(x+\frac{2019}{2}\right)=\frac{c_1+c_2}{2},\forall x\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

và vì vậy ta có

$$f\left(x+\frac{2019}{2}\right)+f(x+2019)=\frac{c_1+c_2}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Từ (2.9) và (2.10), ta được

$$f(x)=f(x+2019)$$

với mọi $x\in\mathbb{R}$, hay $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số

$$g(x)=x^9-4x+2019-f\left(x\right),$$

với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó, $g(x)$ là hàm số xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ bị chặn. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^9-4x+2019-f\left(x\right)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^9 - 4x + 2019 - f(x)\right) = -\infty.$$

Từ đây suy ra, tồn tại các số $n > 0, m < 0$ sao cho $g(n) > 0, g(m) < 0$. Vì hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(m).g(n) < 0$ nên theo định lý giá trị trung gian tồn tại $x_0 \in (n, m)$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay

$$x_0^9 - 4x_0 + 2019 - f(x_0) = 0.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét.

(1) Bài toán trên tương đối "lắt léo". Từ phương trình yêu cầu chứng minh có nghiệm, ta thấy ngay rằng nếu $f(x)$ là một hàm bị chặn thì bài toán được giải quyết thông qua định lý giá trị trung gian quen thuộc. Do vậy mấu chốt của bài toán là ta cần phải chứng minh $f(x)$ là một số hàm số bị chặn. Để giải quyết vấn đề này, ta đã sử dụng linh hoạt tính chất của hàm số f để chỉ ra nó là một hàm số tuần hoàn. Sau đó, chúng ta đã sử dụng một kết quả quen thuộc trong giải tích. đó là "nếu một hàm số liên tục và tuần hoàn thì nó bị chặn". Các hàm số $f(x) = sinx$ hoặc $f(x) = cosx$ là những hàm số thường gặp thỏa mãn tính chất này. Cần chú ý rằng, định lý giá trị trung gian đóng vai trò quan trọng trong các bài toán về chứng minh về phương trình đại số có nghiệm. Về mặt hỉnh ảnh, chúng ta có thể hình sau định lý giá trị trung gian như sau "Nếu hàm số $f(x)$ có các giá trị dương và các giá trị âm thì đồ thị của nó sẽ cắt trục tung tại ít nhất một điểm."

(2) Sau đây là một số bài toán có nội dung tương tự.

Bài toán 1. (Đề thi học sinh giỏi cấp Tỉnh của Hà Tĩnh năm 2017)
Cho

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 17$$

và

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 14.$$

Chứng minh rằng hai đa thức đều có nghiệm dương duy nhất α, β và

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 1$$

Bài toán 2. (Đề thi Gặp gỡ Toán học năm 2017)
Cho

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 39x - 46$$

và

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 3.$$

Chứng minh rằng hai đa thức đều có nghiệm dương duy nhất α, β và

$$\{\alpha\} = \{\beta\}^2,$$

trong đó ký hiệu $\{x\}$là phần lẻ của x.

Bài toán 3. (VMO 2003)
Cho

$$P(x) = 4^3 - 2x^2 - 15x + 9$$

và

$$Q(x)=12x^3+6x^2-7x+1.$$

Chứng minh rằng hai đa thức đều có nghiệm ba nghiệm phân biệt. Kí hiệu α và β là hai nghiệm lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Chứng minh rằng

$$\alpha^2+3\beta^2=4.$$

Tiếp theo chúng ta sẽ đến ứng dụng của phương pháp giải tích trong bài toán tìm hằng số lớn nhất (nhỏ nhất) thỏa mãn một bất đẳng thức cho trước.

Bài toán 7. Tìm số thực k lớn nhất sao cho

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq k\left(a^2+b^2+c^2\right)+(9-k)(ab+bc+ca)$$

đúng với mọi a, b, $c>0$.

Lời giải. Xét $a=x$, $b=c=\dfrac{1}{x}$ thì khi $x \to +\infty$, ta có $b, c \to 0$, $a \to +\infty$.
Ta viết lại bất đẳng thức thành

$$\left(1+\frac{2}{a^2}\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq k\left(1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)+(9-k)\left(\frac{b+c}{a}+\frac{bc}{a^2}\right).$$

Chọn bộ như trên với $x \to +\infty$ ta có

$$(1+0)(0+2)(0+2) \geq k(1+0)+(9-k)(0+0) \Leftrightarrow k \leq 4.$$

Ta sẽ chứng minh $k=4$ tức là

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+5(ab+bc+ca).$$

Điều này tương với

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+8 \geq 5(ab+bc+ca).$$

Đặt $ab=x$, $bc=y$, $ca=z$ thì

$$xyz+2\left(x^2+y^2+z^2\right)+8 \geq 5(x+y+z). \tag{2.11}$$

Bổ đề. Với x, y, $z>0$ thì

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1 \geq 2(xy+yz+zx).$$

Ta thấy, bất đẳng thức (2.11) tương đương với bất đẳng thức

$$2xyz+4\left(x^2+y^2+z^2\right)+16 \geq 10(x+y+z).$$

Kết hợp phải bổ đề trên, ta thấy rằng bài toán sẽ được hoàn thành nếu ta chứng minh được bất đẳng thức

$$l3\left(x^2+y^2+z^2\right)+2(xy+yz+zx)+15 \geq 10(x+y+z).$$

Chú ý rằng bất đẳng thức này tương đương với

$$(x+y+z-1)^2+2(x-1)^2+2(y-1)^2+2(z-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh. Vậy giá trị lớn nhất của k là 4.
Nhận xét.

(1) Bổ đề trên có thể chứng minh dễ dàng bằng cách áp dụng Dirichlet như sau: Không mất tính tổng quát, giả sử $(x-1)(y-1) \geq 0$ thì

$$xy \geq x+y-1 \Rightarrow 2xyz \geq 2xz+2yz-2z.$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+2xyz+1 &\geq x^2+y^2+z^2+2xz+2yz-2z+1 \\ &\geq 2xy+(z-1)^2+2xz+2yz \\ &= 2(xy+yz+zx). \end{aligned}$$

Do đó, bổ đề được chứng minh.

(2) Một số bài toán có phương pháp tương tự như bài toán trên
Bài toán 1. (VMO 2006 - Bảng B)
Tìm hằng số thuwjc k lớn nhất thỏa mãn: Với mọi a, b, c dương mà $abc = 1$ thì ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k \geq (k+1)(a+b+c).$$

Bài toán 2. (VN TST 2009)
Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương

$$\left(r+\frac{a}{b+c}\right)\left(r+\frac{b}{c+a}\right)\left(r+\frac{c}{a+b}\right) \geq \left(r+\frac{1}{2}\right)^3.$$

Bài toán 3. (VN TST 2013)
Tìm hằng số k nguyên dương lớn nhất thỏa mãn: Với mọi a, b, c dương mà $abc = 1$ thì ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{k}{a+b+c+1} \geq \frac{k}{4}+3.$$

Bài toán tiếp theo sẽ cho thấy được ứng dụng của phương pháp giải tích trong chủ đề liên quan đến bất phương trình hàm.

Bài toán 8. Cho $a \geq 1$ là một số thực và hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

(1) $\left(f(ax)\right)^2 \leq a^3x^2f(x)$ với mọi số thực x.

(2) f bị chặn trong một lân cận nào đó của 0.

Chứng minh rằng
$$\left|f(x)\right| \le \frac{x^2}{a}$$
với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Trong i. thay $x = 0$ ta thu được
$$\left[f(0)\right]^2 \le 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$
Với mọi $x \ne 0$, từ i. ta có
$$f(x) \ge \frac{\left[f(ax)\right]^2}{a^3x^2} \ge 0$$
với $\forall x \ne 0$. Từ đó, ta được
$$f(x) \ge 0$$
với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu $a = 1$ thì từ i. ta được
$$\left[f(x)\right]^2 \le x^2 f(x).$$
Từ đây, ta suy ra $f(x) \le x^2$với mọi $x \in \mathbb{R}$. Như vậy, bất đẳng thức cần chứng minh đúng với trường hợp $a = 1$.

Bây giờ, ta sẽ xét trường hợp $a > 1$. Đặt
$$g(x) = \frac{\left|f(x)\right|}{\frac{x^2}{a}} = \frac{f(x)}{\frac{x^2}{a}} \ge 0$$
với mọi $x \ne 0$ thì
$$f(x) = \frac{x^2}{a} g(x), \quad \forall x \ne 0.$$
Khi đó, từ i. ta suy ra
$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \le a^3x^2\frac{x^2}{a} g(x), \forall x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow \left[g(ax)\right]^2 \le g(x), \quad \forall x \ne 0. \tag{2.12}$$
Ta sẽ chứng minh
$$g(x) \le g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}}, \quad \text{với} \quad \forall x \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.13}$$

bằng phương pháp quy nạp toán học theo n. Thật vậy, trong (2.12) thay x bởi $\frac{x}{a}$ ta được

$$g(x) \leq \left[g\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{với} \quad \forall x \neq 0. \tag{2.14}$$

Như vậy, mệnh đề (2.13) đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 2$ tức là

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^k}\right)^{2^{-k}}, \forall x \neq 0. \tag{2.15}$$

Trong (2.15) thay x bởi $\frac{x}{a}$ ta được

$$g\left(\frac{x}{a}\right) \leq g\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)^{2^{-k}}, \forall x \neq 0. \tag{2.16}$$

Từ (2.14) và (2.16) , ta suy ra

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)^{2^{-(k+1)}}, \forall x \neq 0. \tag{2.17}$$

Do đó, mệnh đề (2.13) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học mệnh đề (2.13) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, ta có

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}},$$

với $\forall x \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ định nghĩa của hàm g ta thu được

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} = \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2}{a}}\right)^{2^{-n}}. \tag{2.18}$$

Vì $x \neq 0$ và $a > 1$nên với n đủ lớn thì $\frac{x}{a^n}$ sẽ thuộc một lân cận nào đó của điểm 0. Do đó, từ ii. ta suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ và $M > 0$ sao cho với $n \geq n_0$ ta có

$$f\left(\frac{x}{a^n}\right) \leq M.$$

Kết hợp với (2.18) ta được

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} = \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2}{a}}\right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{2.19}$$

Theo quy tắc L'Hospital thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}} = 1.$$

Từ (2.19) cho $n \to \infty$, ta thu được $g(x) \leq 1$với mọi $x \neq 0$ hay

$$\frac{f(x)}{\frac{x^2}{a}} \leq 1, \forall x \neq 0.$$

Từ đây, ta có

$$f(x) \leq \frac{x^2}{a}, \forall x \neq 0.$$

Chú ý rằng $f(0) = 0$ và $f(x) \geq 0$ nên ta được

$$\left|f(x)\right| \leq \frac{x^2}{a},$$

với $\forall x \in \mathbb{R}$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét.

(1) Bài toán trên là một bài toán về bất phương trình hàm có sử dụng tính chất giải tích và khá nặng về mặt kĩ thuật. Để chứng minh $f(x) \leq P(x)$ về mặt ý tưởng ta tìm một đánh giá $f(x) \leq P(x).u_n$ với $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ hoặc $f(x) \leq P(x) + u_n$với $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, trong bài toán này thì

$$u_n = \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. Khi tìm được đánh giá (13), thì ta thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{a^n} = 0$ với mọi $a \geq 1$ nên ta có thể sử dụng giả thiết ii. của bài toán để tiếp tục đánh giá. Bài toán trên là bài toán tổng quát của bài toán dưới đây, là đề thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán của Trung Quốc năm 1998

"Cho hàm số$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

a) $\left[f(x)\right]^2 \leq 2x^2.f\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) \leq 1, \forall x \in (-1, 1)$.

Chứng minh rằng $f(x) \leq \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$."

(2) Ngoài cách giải đã trình bày ở trên, ta có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác như sau:

Vẫn như lời giải ở trên, ta chứng minh được

$$f(0) = 0, f(x) \geq 0$$

với mọi x và bất đẳng thức cần chứng minh đúng khi $a = 1$ và chỉ còn xét trường hợp $a > 1$. Trong i. thay x bởi $\frac{x}{a}$ ta được

$$\left[f\left(x\right)\right]^2 \le ax^2 f\left(\frac{x}{a}\right), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}.$$

Giả sử rằng tồn tại $z \neq 0$ sao cho $f\left(z\right) > z^2$. Từ ii. ta lần lượt có:

$$f\left(\frac{z}{a}\right) > \frac{1}{az^2}\left(z^2\right)^2 = \frac{z^2}{a};$$
$$f\left(\frac{z}{a^2}\right) > \frac{1}{a\left(\frac{z}{a}\right)^2}\left(\frac{z}{a}^2\right)^2 = \frac{z^2}{a}.$$

Từ đó ta được

$$f\left(\frac{z}{a^3}\right) > \frac{1}{a\left(\frac{z}{a^2}\right)^2} = az^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta có:

$$f\left(\frac{z}{a^n}\right) > a^{2n-5}z^2, \quad \forall n \ge 2. \tag{2.20}$$

Do điều kiện thứ hai của bài toán, vế trái của (2.20) bị chặn trên, trong khi vế phải lớn tùy ý khi n đủ lớn, vô lý! Do đó điều giả sử là sai hay

$$f\left(x\right) \le x^2, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}. \tag{2.21}$$

Xét hàm số

$$h\left(x\right) = f\left(x\right) - \frac{x^2}{a} \le f\left(x\right)$$

thì từ i. ta được

$$\left(h(x) + \frac{x^2}{a}\right)^2 \le ax^2\left(h\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x^2}{a^3}\right), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}.$$

Điều này tương đương

$$\left[h\left(x\right)\right]^2 + 2\frac{x^2}{a}h\left(x\right) \le ax^2 h\left(\frac{x}{a}\right), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$$

Từ đó, ta được

$$2\frac{x^2}{a}h\left(x\right) \le ax^2 h\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow h\left(x\right) \le \frac{a^2}{2}h\left(\frac{x}{a}\right),$$

bất đẳng thức này đúng cả khi $x = 0$ vì $h(0) = 0$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta có

$$h\left(x\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n h\left(\frac{x}{a^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Từ (2.21) và (2.22) ta được

$$h\left(x\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n h\left(\frac{x}{a^n}\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n f\left(\frac{x}{a^n}\right).$$

Do đó, ta có

$$h\left(x\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n \left(\frac{x}{a^n}\right)^2 = \frac{x^2}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì n có thể lớn tùy ý nên điều này chỉ đúng khi và chỉ khi $h\left(x\right) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây, ta suy ra điều phải chứng minh.

(3) Dưới đây là một số bài toán tương tự

Bài toán 1.

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bị chặn trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn điều kiện

a) $f(1) = 1$,

b) $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f\left(x\right) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2, \forall x \ne 0.$

Bài toán 2.

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bị chặn trên $[a, b]$, $f(1) = 1$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x + y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

a) $f\left(x + y\right) \le f\left(x\right) + f\left(y\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b) $f\left(x\right) \le e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bài toán 4. (VMO 2006 - Bảng B)

Đặt $F = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \middle| \ f\left(3x\right) \ge f\left(f\left(2x\right)\right) + x, \forall x \in \mathbb{R} \right\}$. Tìm giá trị lớn nhất của α sao cho với mọi $f \in F$ ta luôn có $f(x) \ge \alpha x$.

Bài toán 5. (Olympic Toán Bulgaria 1998)

Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f^2\left(x\right) \ge f\left(x + y\right)\left(f\left(x\right) + y\right); \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 6. (Olympic Toán học Quốc tế năm 2011)

Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x + y\right) \le y.f\left(x\right) + f\left(f\left(x\right)\right); \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \le 0$.

Cuối cùng, để kết thúc chương này, ta sẽ đến với bài toán sau là bài toán số 5 trong đề thi chọn Quốc gia dự thi Olympic toán Quốc tế năm 1992.

Bài toán 9. (VN TST 1992) Với mỗi số nguyên dương n, xét phương trình

$$2n^2x = \log_2\left(n^2x+1\right).$$

Tìm điều kiện của a, b, $c > 0$ để với mỗi nghiệm $x_n \neq 0$ của phương trình trên thì ta luôn có

$$a^{2_n} + b^{x_n} + c^{x_n} \geq 4x_n + 3.$$

Lời giải. Trước hết, với a, b, $c > 0$ ta sẽ chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{abc}.$$

Đặt

$$y = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n \Rightarrow \ln y = n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right).$$

Do đó theo quy tắc L'Hospital thì

$$\lim_{n\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{a^x\ln a + b^x\ln b + c^x\ln c}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}} = \ln\sqrt[3]{abc}.$$

Từ đây ta có

$$\lim_{n\to+\infty} y = \sqrt[3]{abc}.$$

Trở lại bài toán, xét phương trình

$$2n^2x = \log_2\left(n^2x+1\right).$$

Đặt $t = n^2x$ thì

$$2t = \log_2(t+1) \Leftrightarrow 4^t = t+1.$$

Khảo sát hàm số tương ứng, dễ thấy phương trình này có hai nghiệm là

$$t = 0, t = -\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$x_n = -\frac{1}{2n^2}.$$

Ta cần có

$$a^{\frac{1}{2n^2}} + b^{-\frac{1}{2n^2}} + c^{\frac{1}{2n^2}} \geq -\frac{2}{n^2}+3 \Leftrightarrow \frac{a^{\frac{1}{2n^2}} + b^{-\frac{1}{2n^2}} + c^{-\frac{1}{2n^2}}}{3} \geq -\frac{2}{3n^2}+1.$$

Nếu lấy giới hạn trực tiếp sẽ không làm phát sinh điều kiện của a, b, c. Ta lấy mũ $2n^2$ hai vế rồi áp dụng bổ đề ở trên

$$\left(\frac{2\sqrt[2n]{(1/a)}+2\sqrt[2]{(1/b)}}{3}\right)^{2n} \geq \left(-\frac{2}{3n^2}+1\right)^{2n^2}.$$

Điều kiện đã cho đúng với mọi n nên cũng phải đúng khi $n \to +\infty$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[2n^2]{\frac{1}{a}}+\sqrt[2n^2]{\frac{1}{b}}+\sqrt[2n^2]{\frac{1}{c}}}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

và

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3n^2}+1\right)^{2n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3n^2}\right)^{-\frac{3n^2(-4)}{2}} = e^{-\frac{4}{3}}.$$

Do đó ta cần có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq e^{-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow abc \leq \mathrm{e}^4.$$

Với $abc \geq 4$ thì

$$a^{-\frac{1}{2n^2}}+b^{-\frac{1}{2n^2}}+c^{-\frac{1}{2n^2}} \geq 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^{-\frac{1}{2n^2}} \geq 3e^{-\frac{2}{3n^2}}.$$

Ta cần chứng minh điều kiện đủ là

$$3\mathrm{e}^{-\frac{2}{3n^2}} \geq -\frac{2}{n^2}+3$$

hay

$$\mathrm{e}^t \geq t+1$$

với $t = -\frac{2}{3n^2}$. Khảo sát hàm số này, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Trong bài trên, ta có sử dụng quy tắc L'Hospital là: Nếu hàm số $f(x)$, $g(x)$ thỏa mãn $f(c) = g(c) = 0$ và giới hạn

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tồn tại thì

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ta có thể viết quy tắc này theo kiểu sơ cấp hơn như sau

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \epsilon}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to \epsilon}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tài liệu

[1] NGUYỄN TÀI CHUNG, *Chuyên khảo Phương trình Hàm,* Nhà xuất Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2014.

[2] TRẦN NAM DŨNG, LÊ PHÚC LỮ, PHAN MINH ĐỨC, *Lời giải và Bình luận đề thi Học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 năm 2013*, Diễn đàn toán học Mathscope.org.

[3] TRẦN NAM DŨNG, VÕ QUỐC BÁ CẨN, LÊ PHÚC LỮ, HOÀNG ĐỖ KIÊN, NGUYỄN HUY TÙNG, *Lời giải và Bình luận đề thi Chọn học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2014*, Diễn đàn toán học Mathscope.org.

[4] PHẠM ĐỨC HIỆP, *Một số ứng dụng của giải tích trong Số học,* Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, số 481, tháng 7 năm 2017.

[5] LÊ PHÚC LỮ, *Sử dụng giới hạn dãy số trong các bài toán Đại số và Số học.*

[6] LÊ PHÚC LỮ, *Đề thi và lời giải đề chọn Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán Quốc tế từ năm 2005 đến năm 2010.*

[7] KIỀU ĐÌNH MINH, *Phương pháp giải tích qua các bài toán Olympic,* Tạp chí Epsilon số 11, 10-2016.

[8] NGUYỄN DUY THÁI SƠN, *Phương pháp giải tích trong một số bài toán Olympic THPT,* Bài giảng lớp Tập huấn Giáo viên THPT chuyên Khu vực phía Bắc (Vĩnh Phúc-8/2016).