SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO LÀO CAI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI

....@.....................................

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Đề tài: "NGHIỆM CỦA ĐA THỨC"
Năm học 2019 - 2020

Họ và tên: Trần Hoài Vũ
Đơn vị công tác: Trường THPT Chuyên Lào Cai

A. MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Các bài toán về đa thức thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi và luôn được đánh giá là bài toán khó. Các bài toán này thường yêu cầu nghiên cứu tính chất các hệ số của đa thức, tính chất về nghiệm của nó hoặc những bài toán về đa thức nguyên, tính khả quy, bất khả quy và được hỏi theo nhiều hình thức khác nhau.

Bài toán về đa thức liên quan đến nghiệm của đa thức có tần suất xuất hiện khá nhiều trong các đề thi TST, VMO, IMO,…với cách cách hỏi rất phong phú: Có thể là sự tồn tại nghiệm của đa thức; hay các bài toán về nghiệm thông qua hệ thức Vi-et; bài toán về đẳng thức, bất đẳng thức liên quan đến nghiệm và hệ số của đa thức,…Mỗi bài toán đều cần lối tư duy như chứng minh một định lý toán học vậy.

Chính vì vậy tác giả đã quyết định lựa chọn đề tài:

"Nghiệm của đa thức"

Hi vọng phần nào chia sẻ và giúp các bạn tiếp cận tốt hơn về các bài toán dạng này.

II. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

+ Nghiên cứu các hướng suy nghĩ cho lời giải một bài toán về nghiệm của đa thức
+ Vận dụng tính chất nghiệm của đa thức giải quyết các bài toán liên quan đến nghiệm nhằm phát huy khả năng tư duy toán học cho học sinh.

III. Đối tượng học sinh

Đối tượng dạy học của chuyên đề là các học sinh chuyên toán của trường THPT Chuyên, đặc biệt là bồi dưỡng học sinh đội tuyển học sinh giỏi toán.

B. NỘI DUNG

I. Một số kiến thức cơ bản về nghiệm của đa thức

1. Định nghĩa

Giả sử $f(x)\in\mathbb{R}[x],\ \alpha\in\mathbb{R}$.Ta nói f(x) nhận α làm nghiệm nếu f(α) = 0, khi đó f(x) chia hết cho $x-\alpha$ hay nhận $x-\alpha$ làm một nhân tử .

2. Nghiệm đơn, nghiệm bội

Giả sử $f(x)\in\mathbb{R}[x],\ \alpha\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{N}^*$. Ta nói α là nghiệm bội của đa thức f(x) nếu tồn tại $g(x)\in\mathbb{R}[x], g(\alpha)\neq 0$ sao cho $f(x)=(x-\alpha)^k.g(x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.(tức là f(x) chia hết cho $(x-\alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$)

Nếu $k=1$ thì ta nói α là nghiệm đơn

Nếu $k\geq 2$ thì ta nói α là nghiệm bội

3. Định lý Bézout

α là nghiệm của đa thức $f(x)\in\mathbb{R}[x]\Leftrightarrow f(x)\,\vdots\,(x-\alpha)$ *trong* $\mathbb{R}(x)$.

Chứng minh

$\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]$ luôn tồn tại duy nhất $g(x)\in\mathbb{R}[x]: f(x)=(x-\alpha).g(x)+f(\alpha), \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó α là nghiệm của $f(x)\in\mathbb{R}[x]\Leftrightarrow f(\alpha)=0\Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha).g(x)\Leftrightarrow f(x)\,\vdots\,(x-\alpha)$

Hệ quả: $\forall f(x)\in\mathbb{R}[x], \deg f=n\geq 1$ ta luôn có $f(x)-f(\alpha)\,\vdots\,(x-\alpha)$

4. Định lý Viet

a)Định lý Viet thuận

Giả sử $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$.Gọi $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ là các nghiệm của f(x).

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)\\ \dfrac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n\\ \dfrac{a_3}{a_0}=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{a_{n-1}}{a_0}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}+...+\alpha_2\alpha_3...\alpha_n)\\ \dfrac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2....\alpha_n\end{cases}$$

b)Định lý Viet đảo

Cho n số thực $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$. Đặt $\begin{cases}S_1=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\\ S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n\\ S_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ S_{k-1}=\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}+...+\alpha_2\alpha_3...\alpha_n\\ S_k=\alpha_1\alpha_2....\alpha_n\end{cases}$

Khi đó: $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ là n nghiệm của đa thức:

$$f(x)=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-S_3x^{n-3}+...+(-1)^{n-1}S_{n-1}x+(-1)^nS_n$$

5. Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên

Cho $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ đa thức hệ số nguyên. Khi đó: Nếu f(x) có nghiệm hữu tỷ $x_0=\frac{r}{s},(r,s)=1$ thì r là ước của hệ số tự do a_0, s là ước của hệ số cao nhất a_n.

Chứng minh

Do $f(x_0)=0\Rightarrow a_n(\frac{r}{s})^n+a_{n-1}(\frac{r}{s})^{n-1}+...+a_1(\frac{r}{s})+a_0=0\Rightarrow a_0s^n+a_1rs^{n-1}+...+a_{n-1}r^{n-1}s+a_nr^n=0$

$$\Rightarrow a_nr^n=-s(a_0.s^{n-1}+a_1s^{n-2}+...+a_{n-1}r)$$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng $a_nr^n \vdots s$ .Vì (r,s)=1 suy ra (s, r^n)=1 nên a_n chia hết cho s

Lập luận tương tự: $a_0s^n=-r(a_1.s^{n-1}+...+a_{n-1}r^{n-2}s+a_nr^{n-1})$

Chứng tỏ rằng $a_0s^n \vdots r$. Vì (r,s)=1 suy ra (r, s^n)=1 nên suy ra a_0 chia hết cho r

Chú ý: Nếu a_n = 1 thì nghiệm hữu tỷ nếu có là nghiệm nguyên.

6. Tính liên tục

Cho $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Khi đó:

a) f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$

b) Nếu tồn tại hai số a , b thỏa mãn: f(a)f(b) < 0 thì f(x) có ít nhất một nghiệm x = c nằm giữa hai số a và b. Cụ thể:

- $\begin{cases} f(x)\_lt/[a;b] \\ f(a)f(b)<0 \end{cases}\Rightarrow \exists c\in(a;b): f(c)=0$
- $\begin{cases} f(x)\_lt/[a;b] \\ f(a)f(b)\le 0 \end{cases}\Rightarrow \exists c\in[a;b]: f(c)=0$

7. Khai triển Taylor

Cho $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$. $\forall a\in\mathbb{R}$, ta có khai triển:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

Công thức (1) gọi là khai triển Taylor của f(x) tại điểm x = a.

8. Khai triển Maclaurin

Trong công thức (1) ta thay a bởi 0 thì được:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (2)$$

Công thức (2) gọi là khai triển Maclaurin của f(x).

II. Một số bài toán điển hình

Nhận xét: *Ta xét đa thức* $P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)=x^3-3x^2+4x-2$ *có nghiệm dương duy nhất là* $a=1$.
Đặt $a=3-b$ *(khi đó b = 2). Do* $P(a)=0$ *nên* $P(3-b)=0 \Leftrightarrow b^3-6b^2+13b-10=0$.
Khi đó, ta kiểm tra được đa thức $Q(x)=x^3-6x^2+13x-10$ *có nghiệm dương duy nhất là b = 2. Từ đây ta có bài toán sau:*

Bài toán 1 :
Cho hai đa thức $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$, $Q(x)=x^3-6x^2+13x-10$.
a) CMR: Hai đa thức trên có nghiệm dương duy nhất
b) Gọi a và b lần lượt là 2 nghiệm dương của P(x) và Q(x). CMR: a + b = 3.

Nhận xét: *Với bài toán trên thì lời giải thật dễ dàng vì ta trực tiếp tìm được nghiệm của hai đa thức trên. Tuy nhiên, nếu việc tìm nghiệm thực của hai đa thức trên gặp khó khăn thì ta giải quyết bài toán như sau:*

a) Ta thấy nếu P(x), Q(x) có nghiệm thì đó phải là nghiệm dương. Vì nếu với $x_0<0 \Rightarrow P(x_0)<0$ (tương tự đối với Q(x)).
Mặt khác: $P'(x)>0, Q'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên P(x), Q(x) là 2 hàm đồng biến trên tập thực. Do đó hai đa thức trên có nghiệm dương duy nhất.
b) Đặt a = 3 – m. Do $P(a)=0$ nên $P(3-m)=0 \Leftrightarrow m^3-6m^2+13m-10=0$. Tức là m là một nghiệm của $Q(x)=x^3-6x^2+13x-10$. Vì Q(x) có nghiệm duy nhất nên $m=b$. Từ đó suy ra a = 3 – b hay a + b = 3 (đpcm).

Nhận xét: *Từ lời giải trên ta xây dựng 2 đa thức mới là* $P_1(x), Q_1(x)$ *thỏa mãn:*
+) Đa thức $P_1(x)$ *có các nghiệm là bình phương các nghiệm của đa thức P(x). Ta dễ dàng tìm được* $P_1(x)=x^3-x^2+4x-4$
+) Đa thức $Q_1(x)$ *có các nghiệm là bình phương các nghiệm của đa thức Q(x). Ta dễ dàng tìm được* $Q_1(x)=x^3-10x^2+49x-100$
Do 2 nghiệm của P(x) và Q(x) đều dương nên ta có bài toán mới như sau:

Bài toán 2:
Cho hai đa thức $P_1(x)=x^3-x^2+4x-4$, $Q_1(x)=x^3-10x^2+49x-100$.
a) CMR: Hai đa thức trên có nghiệm dương duy nhất
b) Gọi u và v lần lượt là 2 nghiệm dương của $P_1(x), Q_1(x)$. CMR: $\sqrt{u}+\sqrt{v}=3$
Nhận xét: *Việc giải bài toán 2 cũng rất dễ dàng vì ta có thể dễ dàng tìm được u = 1 và v = 4. Tuy nhiên, nếu việc tìm nghiệm của* $P_1(x), Q_1(x)$ *gặp khó khăn thì ta làm như thế nào? Rõ ràng, muốn giải bài toán 2 ta phải đi ngược lại quá trình phân tích ở trên.*

Ta xét một bài toán mà việc tìm nghiệm khó khăn.

Bài toán 3:
Cho hai đa thức $P(x)=x^3+2x^2+3x+4$, $Q(x)=x^3-5x^2+10x-10$.
a) CMR: P(x) có nghiệm duy nhất âm, Q(x) có nghiệm duy nhất dương.
b) Gọi a và b lần lượt là 2 nghiệm của P(x) và Q(x). Tính tổng a + b.

Nhận xét và lời giải: *Rõ ràng việc tìm nghiệm của hai đa thức trên gặp khó khăn, hơn nữa bài toán yêu cầu tính tổng a + b chứ không phải là chứng minh rằng tổng là một hằng số nào đó. Ta giải quyết bài toán trên như sau:*

a) Dễ dàng
b) Giả sử tổng a + b = k. Ta đi tìm k.
Từ a + b = k, ta có: b = k – a. Do b là nghiệm của Q(x) nên $Q(b)=0$, suy ra:
$Q(k-a)=0 \Leftrightarrow -a^3+(3k-5)a^2+(-3k^2+10k-10)a+(k^3-5k^2+10k-10)=0$ (*).
Vì a là nghiệm của P(x), nên từ (*) ta mong muốn có :

$$\frac{-1}{1}=\frac{3k-5}{2}=\frac{-3k^2+10k-10}{3}=\frac{k^3-5k^2+10k-10}{4} \text{ (**)}.$$

Từ đẳng thức (**), ta tìm được giá trị duy nhất k = 1.
Vậy: Tổng a + b = 1.

Nhận xét: *Về cách hỏi thì bài toán 3 có khác bài toán 1 tý chút. Nhưng về bản chất vấn đề không hề thay đổi. Biết cách giải quyết bài toán 1, cho ta tư duy để giải bài toán 3 một cách nhẹ nhàng.*
Cũng như trên, ta xây dựng hai đa thức mới là $P_2(x), Q_2(x)$ *thỏa mãn:*

+) Đa thức $P_2(x)$ *có các nghiệm là bình phương các nghiệm của đa thức P(x).*
Giả sử $P_2(x)=x^3+ax^2+bx+c$. *Theo hệ thức Vi – et, ta có:*

$$\begin{cases} -a=\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 3}x_i x_j=-2 \\ b=\sum_{1\le i<j\le 3}x_i^2x_j^2=\left(\sum_{1\le i<j\le 3}x_i x_j\right)^2-2x_1x_2x_3\sum_{i=1}^{3}x_i=-7 \\ -c=\left(x_1x_2x_3\right)^2=16 \end{cases}$$

Từ đây suy ra: $P_2(x)=x^3+2x^2-7x-16$.
+) Đa thức $Q_1(x)$ *có các nghiệm là 2 lần bình phương các nghiệm của đa thức Q(x).*
Tương tự ta cũng tìm được $Q_2(x)=x^3-10x^2-800$.
+) Chú ý rằng: P(x) có nghiệm duy nhất a < 0, còn Q(x) có nghiệm duy nhất b > 0.
Vì thế nếu u, v là 2 nghiệm dương duy nhất của $P_2(x)=x^3+2x^2-7x-16$ *và*

$Q_2(x) = x^3 - 10x^2 - 800$ *thì* $\sqrt{u} = -a; \sqrt{\frac{v}{2}} = b$. *Do a + b = 1 nên có :* $\sqrt{\frac{v}{2}} - \sqrt{u} = 1$.

Ta có bài toán mới như sau :

Bài toán 4:

Cho hai đa thức $P_2(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 16$, $Q_2(x) = x^3 - 10x^2 - 800$.

a) CMR: Hai đa thức trên có nghiệm thực dương duy nhất.

b) Gọi u và v lần lượt là 2 nghiệm thực dương của $P_2(x), Q_2(x)$. CMR: $\sqrt{\frac{v}{2}} - \sqrt{u} = 1$.

Nhận xét :

Việc giải bài toán 4,chỉ cần đi ngược lại quá trình tạo dựng nên $P_2(x), Q_2(x)$ *là xong. Các bài toán từ 1 đến 4, hai đa thức ban đầu chỉ có đúng 1 nghiệm. Ta xét một bài toán mà số nghiệm của nó nhiều hơn 1 nghiệm.*

Bài toán 5:

Cho hai đa thức: $P(x) = x^3 - 3x + 1$ và $Q(x) = 8x^3 - 36x^2 + 48x - 19$.

a) Chứng minh rằng: Mỗi đa thức trên đều có 3 nghiệm thực phân biệt.

b) Gọi a là nghiệm lớn nhất của P(x) và b là nghiệm nhỏ nhất của Q(x).

Chứng minh rằng: $a + 2b = 3$.

Nhận xét :

Phần đầu của bài toán 5 khá đơn giản. Ta có thể lập bảng biến thiên của P(x) và Q(x) là có ngay kết quả, hoặc cũng có thể sử dụng tính chất của hàm liên tục đối với đa thức bậc 3.

Về ý tưởng giải quyết phần sau, cũng giống như các bài toán trên. Tuy nhiên cần để ý là a là nghiệm lớn nhất của P(x) còn b là nghiệm nhỏ nhất của Q(x) nên cần phân biệt 2 nghiệm trên với các nghiệm khác của P(x) và Q(x).

Với những nhận xét ở trên, bài toán 5 được giải quyết như sau:

a) Vì $P(-2) = -1 < 0, P(0) = 1 > 0, P(1) = -1 < 0, P(2) = 3 > 0$ suy ra P(x) có 3 nghiệm phân biệt và nghiệm lớn nhất $a \in (1;2)$

Vì $Q(0) = -19 < 0,\ Q(1) = 1 > 0, Q(2) = -3 < 0, Q(3) = 17 > 0$ suy ra Q(x) có 3 nghiệm phân biệt và nghiệm bé nhất $b \in (0;1)$

b) Đặt a = 3 – 2m.

Vì $P(a) = 0 \Rightarrow (3-2m)^3 - 3(3-2m) + 1 = 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 36m^2 + 48m - 19 = 0$.

Suy ra m là 1 nghiệm của $Q(x) = 8x^3 - 36x^2 + 48x - 19$.

Do $a \in (1;2) \Rightarrow m = \frac{3-a}{2} \in (0;1) \Rightarrow m = b \Rightarrow b = \frac{3-a}{2} \Rightarrow a + 2b = 3$.

Nhận xét:

Vẫn giữ ý tưởng hai đa thức ban đầu có 3 nghiệm phân biệt. Tuy nhiên,cũng vẫn với cách xây dựng đa thức mới có các nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước, ta có bài toán mới khó hơn như sau:

Bài toán 6 (VMO 2003): Cho hai đa thức: $P(x)=4x^3-2x^2-15x+9$ và $Q(x)=12x^3+6x^2-7x+1$.

a) Chứng minh rằng mỗi đa thức đã cho đều có ba nghiệm thực phân biệt.

b) Kí hiệu α,β tương ứng là nghiệm lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$.

Chứng minh rằng $\alpha^2+3\beta^2=4$.

Lời giải

a) Từ $\alpha^2+3\beta^2=4$ suy ra $\alpha<2;\beta<1,2$.

$P(-2)=-1;P(-1)=18;P(1,5)=-4,5;P(1,9)=0,716\ \ (1)$

$Q(-2)=-57;Q(-1)=2;Q(0,3)=-0,236;Q(1)=12\ \ (2)$

Từ (1) suy ra $P(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt và nghiệm lớn nhất $\alpha\in(1,5;1,9)$ (3)

Từ (2) suy ra $Q(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt và nghiệm lớn nhất $\beta\in(0,3;1)$ (4)

b) Vì α là nghiệm của $P(x)$ nên: $4\alpha^3-2\alpha^2-15\alpha+9=0$. Suy ra $4\alpha^3-15\alpha=2\alpha^2-9$

$\Rightarrow 16\alpha^6-120\alpha^4+225\alpha^2=4\alpha^4-36\alpha^2+81$

$\Rightarrow 16\alpha^6-120\alpha^4+261\alpha^2-81=0 \qquad (5)$

Từ (3) có $4-\alpha^2>0$. Ta sẽ chứng minh $x_0=\dfrac{\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{3}$ là nghiệm của $Q(x)$.

Thật vậy, ta có $Q(x_0)=\frac{4}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{3(4-\alpha^2)}+2(4-\alpha^2)-\frac{7}{3}\sqrt{3(4-\alpha^2)}+1$

$$=\left(\frac{9-4\alpha^2}{3}\right)\sqrt{3(4-\alpha^2)}+9-2\alpha^2 \quad (6)$$

Từ (3) ta có $2\alpha^2<9<4\alpha^2$ nên $9-2\alpha^2>0;4\alpha^2-9>0$. Từ đó và

$9(9-2\alpha^2)^2-(9-4\alpha^2)^2 3(4-\alpha^2)$

$=9(81-36\alpha^2+4\alpha^4)-3(81-72\alpha^2+16\alpha^4)(4-\alpha^2)$

$=3(16\alpha^6-124\alpha^4+261\alpha^2-81)=0$ theo (5),

Suy ra $9-2\alpha^2=\left(\dfrac{4\alpha^2-9}{3}\right)\sqrt{3(4-\alpha^2)}$. Do đó $Q(x_0)=0$ theo (6).

Vì thế x_0 là nghiệm của $Q(x)$. Hơn nữa từ (3) suy ra:

$\sqrt{1,17}<3x_0<\sqrt{5,25}\Rightarrow 1<3x_0<3\Rightarrow 0,3<x_0<1$.

Từ đó và theo (2), (4) β là nghiệm duy nhất của $Q(x)$ trong khoảng $(0,3;1)$ nên

$x_0=\beta$ hay $\dfrac{\sqrt{3(4-\alpha^2)}}{3}=\beta$, do đó $\alpha^2+3\beta^2=4$.

Bài toán 7: Tìm tất cả các nghiệm của đa thức

$P(x)=(a^2-a)^2(x^2-x+1)^3-(a^2-a+1)^3(x^2-x)^2$, $a\neq 0, a\neq 1$.

Lời giải.

Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của đa thức đã cho.

Khi đó ta có $\left(a^2-a\right)^2\left(x_0^2-x_0+1\right)^3-\left(a^2-a+1\right)^3\left(x_0^2-x_0\right)^2=0$.

Mặt khác

$$P\left(1-x_0\right)=\left(a^2-a\right)^2\left[\left(1-x_0\right)^2-\left(1-x_0\right)+1\right]^3-\left(a^2-a+1\right)^3\left(\left(1-x_0\right)^2-\left(1-x_0\right)\right)^2$$

$$=\left(a^2-a\right)^2\left(x_0^2-x_0+1\right)^3-\left(a^2-a+1\right)^3\left(x_0^2-x_0\right)^2=0$$

và $P\left(\dfrac{1}{x_0}\right)=\left(a^2-a\right)^2\left(\dfrac{1}{x_0^2}-\dfrac{1}{x_0}+1\right)^3-\left(a^2-a+1\right)^3\left(\dfrac{1}{x_0^2}-\dfrac{1}{x_0}\right)^2$

$$=\left(a^2-a\right)^2\left(\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0^2}\right)^3-\left(a^2-a+1\right)^3\left(\frac{1-x_0}{x_0^2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{x_0^6}\left[\left(a^2-a\right)^2\left(x_0^2-x_0+1\right)^3-\left(a^2-a+1\right)^3\left(x_0^2-x_0\right)^2\right]=0$$

Ta thấy $P\left(x\right)$ là đa thức bậc 6 nên nó có tối đa 6 nghiệm. Dễ thấy $x=a$ là một nghiệm của đa thức nên theo đánh giá trên thì $P\left(x\right)$ có thêm 2 nghiệm nữa là $1-a$ và $\dfrac{1}{a}$. Tiếp tục quá trình ta lại có thêm 3 nghiệm nữa là $1-\dfrac{1}{a}$; $\dfrac{1}{1-a}$; $\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}$. Vậy $P\left(x\right)$ có các nghiệm là a; $1-a$; $\dfrac{1}{a}$; $1-\dfrac{1}{a}$; $\dfrac{1}{1-a}$; $\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}$.

Nhận xét: *Nếu tồn tại giá trị a làm cho các nghiệm trùng nhau thì giá trị a đó cũng làm cho đa thức đã cho có nghiệm bội. Do đó, điều này không ảnh hưởng đến sự đầy đủ các nghiệm của đa thức.*

Bài toán 8 (Indonesia - 2017)

Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên và có ít nhất 9 nghiệm nguyên phân biệt. Giả sử rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{Z}$ sao cho $|P(x_0)| < 2017$. Chứng minh rằng $P(x_0)=0$.

Lời giải

Đặt $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_9)Q(x)$ với $Q(x)\in\mathbb{Z}[x]$, trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_9$ là các nghiệm nguyên phân biệt của $P(x)$.

Giả sử tồn tại x_0 sao cho $P(x_0)\neq 0$ thì $Q(x_0)\neq 0$, suy ra $|Q(x_0)|\geq 1$.

Ta có

$$|P(x_0)|=|(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_9)||Q(x_0)|\geq|1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-4)\cdot 5|=2880>2017.$$

Điều mâu thuẫn này cho thấy điều giả sử là sai. Ta có đpcm.

Nhận xét: *Ý tưởng của bài toán trên trùng với ý tưởng của bài toán trong đề Olimpic Hi Lạp, chỉ khác là cách hỏi khác nhau. Ta có bài toán sau:*

Bài toán 9 (Olimpic Hi Lạp)

Cho P(x) là đa thức hệ số nguyên có 13 nghiệm nguyên phân biệt. Hãy chỉ ra rằng nếu $n \in \mathbb{Z}$ không phải là nghiệm của P(x) thì $|P(n)| \geq 7.(6!)^2$. Cho 1 ví dụ khi dấu bằng xảy ra.

Lời giải

Giả sử có: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{13})Q(x),\ Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Lấy $n \in \mathbb{Z}$ không phải là nghiệm của P(x) thì có: $|P(n)| = |(n - x_1)(n - x_2)...(n - x_{13})Q(n)|$

Do $(n - x_1)(n - x_2)...(n - x_{13})$ là tích của 13 số nguyên phân biệt khác 0, còn Q(n) cũng là một số nguyên và có thể trùng với 1 trong 13 số nguyên ở trên. Do đó giá trị nhỏ nhất của tích $|(n - x_1)(n - x_2)...(n - x_{13})Q(n)|$ có thể nhận được là

$|(7)(6)(-6)(5)(-5)(4)(-4)(3)(-3)(2)(-2)(1)(-1)(1)| = 7.(6!)^2$

Lấy ví dụ khi có dấu bằng: Cho n = 0 và

$P(x) = (x + 7)(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 16)(x^2 - 25)(x^2 - 36)$.

Bài toán 10. (Ấn Độ - 2017)

Cho đa thức bậc ba $P(x) = x^3 + \alpha x + 4 - 2\cdot 2016^n$ với $n \in \mathbb{N}$. Biết rằng P có ba nghiệm tự nhiên (không nhất thiết phân biệt), chứng minh rằng $\alpha = -3$.

Lời giải

Giả sử phương trình có ba nghiệm là $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $n > 0$ thì

$$abc = 4 - 2\cdot 2016^n \equiv 4 \pmod 7.$$

Mặt khác $a + b + c = 0$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \equiv 5 \pmod 7$, mà $abc \neq 0 \pmod 7$ nên số dư của a^3, b^3, c^3 khi chia cho 7 thuộc tập $\{1, 6\}$ nên điều trên không thể xảy ra.

Vậy $n = 0$ hay $abc = 2, a + b + c = 0$; dễ dàng tính được $(a, b, c) = (2, -1, -1)$ hay $\alpha = -3$.

***Nhận xét**: Bài toán trên khai thác triệt để tính chất số học của số nguyên và vận dụng khéo léo hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ khi a + b + c = 0*

Bài toán 11: Moldova TST 2019 (Ngày 2) - 2019

Cho $P(X) = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + ... + a_1X + a_0$ là một đa thức với tất cả các hệ số dương. Chứng minh rằng tồn tại hoán vị $b_{2n+1}, b_{2n}, ...b_1, b_0$ của bộ số $a_{2n+1}, a_{2n}, ...a_1, a_0$ sao cho đa thức $Q(X) = b_{2n+1}X^{2n+1} + b_{2n}X^{2n} + ... + b_1X + b_0$ luôn có một nghiệm thực.

Lời giải

Trước hết ta xét và chứng minh bổ đề sau: Đa thức $x^{2n+1} + x^{2n} + ... + x + 1$ là một hàm tăng nghiêm ngặt.

Thật vậy: Bổ đề hiển nhiên đúng với biến $x \geq 0$.

Ta xét với $x<0$. Đạo hàm của đa thức trên là: $\left(\dfrac{x^{2k}-1}{x-1}\right)' = \dfrac{2kx^{2k-1}\ \ x-1\ -\ x^{2k}-1}{x-1\ ^{2}}$

Ta sẽ chứng minh rằng: $2k\ \ x-1\ x^{2k-1} > \ x^{2k}-1$ (1)

Do $x<0$ nên $\ 1 \Leftrightarrow 2kx^{2k-1} < x^{2k-1}+x^{2k-2}+...+x+1 \Leftrightarrow x^{2k-1} < \dfrac{x^{2k-2}+...+x+1}{2k-1}$

$$\Leftrightarrow x^{2k-1} < \frac{1}{2k-1}.\frac{1}{1-x}\ 1-x^{2k-1} \quad 2$$

Ta thấy (2) luôn đúng với $x<0$. Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ chúng ta chỉ cần chọn hoán vị $\ b_i\ $ sao cho $b_1, b_3, ...b_{2n+1}$ là $n+1$ số lớn nhất và $b_0, b_2, b_4, ...b_{2n}$ là $n+1$ số nhỏ nhất. Vì x^{2i+1} luôn tăng nghiêm ngặt trên tập số thực âm, trong khi x^{2i} giảm nghiêm ngặt trên tập số thực âm. Mặt khác chúng ta có thể viết: $b_{2n+1}x^{2n+1}+b_{2n}x^{2n}+...+b_1x+b_0 = c\ \ 1+x+x^2+...+x^{2n+1}\ +f(x)+g(x)$

Trong đó: $f(x)$ là tổng một số đa thức lẻ với hệ số dương

$g(x)$ là tổng một số đa thức chẵn với hệ số âm

Tức là ta đã chọn được hoán vị $\ b_{2n+1}, b_{2n}, ...b_1, b_0\ $ bộ số $\ a_{2n+1}, a_{2n}, ...a_1, a_0\ $ sao cho đa thức $b_{2n+1}x^{2n+1}+b_{2n}x^{2n}+...+b_1x+b_0 = c\ \ 1+x+x^2+...+x^{2n+1}\ +f(x)+g(x)$ luôn tăng nghiêm ngặt, và do đó luôn có 1 nghiệm thực

Nhận xét:

+) Bài toán trên áp dụng vấn đề giải tích (tính đơn điệu) trong bài toán hàm số đa thức cho ta một lời giải đẹp

+) Sử dụng tính liên tục của hàm số đa thức, ta chứng minh được số nghiệm của phương trình, kết hợp việc tính đạo hàm đến cấp 2 của 1 biểu thức cho ta bài toán sau:

Bài toán 12. Cho đa thức $P(x) = x(x^2-1)(x^2-a)-1$ với $a \geq 5$.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ luôn có 5 nghiệm thực phân biệt. Đặt là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

b) Tính $T = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{1}{x_i^4 - x_i^2}$.

Lời giải

a) Ta có $P(x)$ là hàm liên tục và

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty, P(-2) = 6a-25 > 0, P(-1) = -1 < 0,$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12a-35}{32} > 0, P(1) = -1 < 0, \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

nên $P(x)$ có nghiệm thuộc $(-\infty;-2), (-2;-1), \left(-1;\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2};1\right), (1;+\infty)$.

b) Ta có $P'(x) = 5x^4 - 3(a+1)x^2 + a, P''(x) = 20x^3 - 6(a+1)x$ và

$$\frac{1}{x^4-x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \text{ nên } T = \sum_{i=1}^{5}\frac{2}{x_i^2} + \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1} - \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i-1}.$$

Chú ý rằng $\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x-x_i}$ nên $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1}-\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i-1}=-P'(-1)+P'(1)=0.$

Tiếp tục đạo hàm hai vế, ta có $\frac{P''(x)P(x)-\left[P'(x)\right]^2}{P^2(x)}=-\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{(x-x_i)^2}$ nên $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^2}=-\frac{P''(0)P(0)-\left[P'(0)\right]^2}{P^2(0)}=a^2$. Vậy $T=2a^2$.

Bài toán 13 (Benelux - 2017): Cho số nguyên dương $k\ge 2$ và đặt $65^k=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}$. Xét đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ .Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm hữu tỷ.

Lời giải

Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề:

Nếu đa thức $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ và có nghiệm là $x=\frac{p}{q}$ với $(p,q)=1$ thì $f(x)$ có thể viết thành

$$f(x)=(qx-p)g(x) \text{ mà } g(x)\in\mathbb{Z}[x].$$

Bổ đề này được suy ra trực tiếp từ kết quả sau: Tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản (đa thức nguyên bản – premitive polynomial là đa thức hệ số nguyên mà các hệ số không có ước nguyên tố chung).

Thật vậy, xét $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ và $g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$ là hai đa thức nguyên bản; giả sử tích $f(x)g(x)$ là một đa thức không nguyên bản, tức là có một ước nguyên tố chung p cho các hệ số.

Do f,g nguyên bản nên tồn tại a_r và b_s không chia hết cho p.

Giả sử rằng r là chỉ số lớn nhất trong f và s là chỉ số lớn nhất trong g thỏa mãn điều kiện đó. Khi đó $p\,|\,a_i, p\,|\,b_j$ với $i>r, j>s$. Xét lũy thừa x^{r+s} với hệ số là $\sum_{i+j=r+s}a_ib_j$.

Ta thấy nếu $i>r$ thì hệ số a_ib_j sẽ chia hết cho p; còn nếu $i<r$ thì $j>s$ nên hệ số đó cũng chia hết cho p; trong khi đó chỉ có a_rb_s là không chia hết cho p nên tổng trên không chia hết cho p,mâu thuẫn.

Áp dụng vào bổ đề, ta thấy nếu $g(x)$ không có hệ số nguyên thì tồn tại $m>1$ và $m\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $mg(x)\in\mathbb{Z}[x]$ và $mg(x)$ là đa thức nguyên bản; mà $qx-p$ cũng nguyên bản nên suy ra $mf(x)$ nguyên bản, vô lý. Suy ra $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$.

Quay trở lại bài toán,

Dễ thấy các nghiệm thực của $P(x)$ đều âm vì tất cả hệ số của $P(x)$ âm. Giả sử $P(x)$ có nghiệm là $x=-\frac{p}{q}$ với $p,q\in\mathbb{Z}^+$ và $(p,q)=1.$ Khi đó

$$P(x)=(qx+p)Q(x) \text{ với } Q(x)\in\mathbb{Z}[x].$$

Suy ra $65^k=(10q+p)Q(10)$. Chú ý rằng $a_1=2, a_0=5$ vì 65^k với $k\ge 2$ tận cùng là 25.

Ta cũng có $p\,|\,a_0=5$ nên $p=1$ hoặc $p=5.$ Ta xét hai trường hợp:

Nếu $p=1$ thì $10q+1$ là ước của 65^k, nhưng $q\in\{1,2,3,\ldots,9\}$ và 65^k không có ước nào

có dạng $10q+1$ như trên nên vô lý.
Nếu $p=5$ thì $10q+5$ là ước của 65^k hay $2q+1$ là ước của $13^k\cdot 5^{k-1}$.
Vì $3\le 2q+1\le 19$ nên $2q+1\in\{5,13\}$ và $q\in\{2,6\}$. Suy ra a_n là số chẵn vì $q\,|\,a_n$.
(1) Nếu $q=6$ thì $x=-\frac{5}{6}$ là nghiệm của $P(x)$ nên $P\left(-\frac{5}{6}\right)=0$ hay

$$a_n(-5)^n+a_{n-1}(-5)^{n-1}\cdot 6+\cdots+a_2(-5)^2\cdot 6^{n-2}+2\cdot(-5)\cdot 6^{n-1}+5\cdot 6^n=0.$$

Chia hai vế cho -5, ta có

$$a_n(-5)^{n-1}+a_{n-1}(-5)^{n-2}\cdot 6+\cdots+a_2(-5)\cdot 6^{n-2}+2\cdot 6^{n-1}-6^n=0.$$

Dựa vào chữ số tận cùng, ta suy ra $2\cdot 6^{n-1}-6^n=-4\cdot 6^{n-1}$ tận cùng là 0, vô lý.
(2) Nếu $q=2$ thì $x=-\frac{5}{2}$ là nghiệm của $P(x)$ nên $P\left(-\frac{5}{2}\right)=0$ hay

$$a_n(-5)^n+a_{n-1}(-5)^{n-1}\cdot 2+\cdots+a_2(-5)^2\cdot 2^{n-2}+2\cdot(-5)\cdot 2^{n-1}+5\cdot 2^n=0 \text{ nên}$$

$$a_n(-5)^n+a_{n-1}(-5)^{n-1}\cdot 2+\cdots+a_2(-5)^2\cdot 2^{n-2}=0.$$

Lại chia hai vế cho $(-5)^2$, ta có

$$a_n(-5)^{n-2}+a_{n-1}(-5)^{n-3}\cdot 2+\cdots+a_3(-5)\cdot 2^{n-3}+a_2\cdot 2^{n-2}=0.$$

Nếu $k\ge 3$ thì $625\,|\,65^k$ nên 65^k sẽ có tận cùng là 625 và $a_2=6$ nên vế trái có tận cùng khác 0, không thỏa. Suy ra $k=2$. Khi đó, ta có $P(x)=4x^3+2x^2+2x+5$, dễ dàng kiểm tra trực tiếp được đa thức này không có nghiệm hữu tỷ.
Vậy với mọi $k\ge 2$ thì đa thức $P(x)$ xác định như trên không có nghiệm hữu tỷ.

Bài toán 14: Cho đa thức $P(x)$ monic, bậc 12 và có 12 nghiệm thực âm (không nhất thiết phân biệt). Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=P(10)\cdot\left(\frac{P'(0)}{P(0)}\right)^2$.

Lời giải

Đặt $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{12})$ thì $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{x-x_{12}}$.
Đặt $y_i=-x_i>0,\forall i=1,2,\ldots,12$ thì

$$T=(y_1+10)(y_2+10)\ldots(y_{12}+10)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_{12}}\right)^2.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_{12}}\ge\frac{12}{\sqrt[12]{y_1y_2\ldots y_{12}}}$ và

$$y_i+10=y_i+2+2+2+2+2\ge 6\sqrt[6]{32y_i} \text{ với mọi } i=1,2,\ldots,12.$$

Suy ra $T\ge 6^{12}\cdot\left(\sqrt[6]{32}\right)^{12}\cdot 12^2=36\cdot 12^{12}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $12^{12}\cdot 36$, đạt được khi $P(x)=(x+2)^{12}$.

Bài toán 15: Cho phương trình $x^5-\frac{1}{2}x^4-5x^3+x^2+4x-1=0$ (2.1)

Chứng minh rằng phương trình (2.1) có đúng 5 nghiệm phân biệt. Với $x_i(i=\overline{1,5})$ là nghiệm của phương trình (2.1) , tính tổng S biết : $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2x_i^5-x_i^4-2}$.

Lời giải

f(x) là hàm số xác định và liên tục trên R

Ta có: $f(-2)=-5; f(\frac{-3}{2})=2; f(0)=-1; f(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}; f(1)=\frac{-1}{2}; f(3)=\frac{175}{2}$

Khi đó: $f(-2).f(\frac{-3}{2})<0; f(\frac{-3}{2}).f(0)<0; f(0).f(\frac{1}{2})<0; f(\frac{1}{2}).f(1)<0; f(1).f(3)<0$

Do đó phương trình có 5 nghiệm phân biệt

$-2<x_1<\frac{-3}{2}<x_2<0<x_3<\frac{1}{2}<x_4<1<x_5<3$

Ta có x_i là nghiệm của (2.1) nên

$: x_i^5-\frac{1}{2}x_i^4-5x_i^3+x_i^2+4x_i-1=0 \Leftrightarrow 2x_i^5-x_i^4-2=2(5x_i^3-x_i^2-4x_i)$

Do đó: $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{(5x_i^5-x_i^2-4x_i)}$

Xét biểu thức: $g(x)=\frac{x+1}{5x^3-x^2-4x}=\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$

Đồng nhất thức ta được: $g(x)=-\frac{1}{4x}+\frac{2}{9(x-1)}+\frac{5}{36(5x+4)}$

Do vậy: $S=-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{9}\sum_{i=i}^{5}\frac{1}{x_i-1}+\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+\frac{4}{5}}$

Với $x\neq x_i$ ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=i}^{5}\frac{1}{x-x_i}$

Và $f'(x)=5x^4-2x^3-15x^2+2x+4$

Do đó:

$$\frac{f'(1)}{f(1)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1-x_i} => \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i-1}=-\frac{f'(1)}{f(1)}=-12$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-x_i} => \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=-\frac{f'(0)}{f(0)}=4$$

$$\frac{f'(-\frac{4}{5})}{f(-\frac{4}{5})}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-\frac{4}{5}-x_i} => \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+\frac{4}{5}}=-\frac{f'(-\frac{4}{5})}{f(\frac{4}{5})}=-\frac{12900}{4789}$$

Vậy: $S=-\frac{8959}{4789}$.

Bài toán 16 : Cho số tự nhiên $n\geq 2$ và n là số thực $a_1,a_2,...,a_n$ sao cho

$a_1 > -1, a_2 \geq \frac{n-1}{2}$. Giả sử phương trình $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ có đúng n nghiệm thực. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm đó nằm trong đoạn $\left[-a_1, a_1 + 2\right]$

Lời giải

Đặt $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$

Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là n nghiệm của phương trình P(x) = 0

Khi đó:

$x_1 + x_2 + ... + x_n = -a_1$

$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = a_2 \geq \frac{1}{2}$

Mặt khác: $x_k^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a_1^{\ 2} - 2a_2 \leq a_1^{\ 2}$. Do đó: $x_k \in \left[-a_1; a_1\right], k = 1, 2, ..., n$

Vậy tất cả các nghiệm của P(x) = 0 đều nằm trong đoạn $\left[-a_1; a_1 + 2\right]$

Bài toán 17: Cho các đa thức P(x) , Q(x), R(x) với hệ số thực có bậc tương ứng là 3,2,3 thỏa mãn đẳng thức $P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi đa thức $T(x) = P(x).Q(x).R(x)$ có ít nhất là bao nhiêu nghiệm thực (kể cả nghiệm bội)

Lời giải

Đầu tiên ta có thể thấy rằng $Q^2(x) = (R(x) - Q(x))(R(x) + Q(x))$

Do $\deg(R + P) = 3$ nên phương trình $R(x) + P(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm, điều này chứng tỏ rằng phương trình Q(x) = 0 có nghiệm. Mà do $\deg Q = 2$ nên $Q(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Mặt khác: $P^2(x) = (R(x) - Q(x))(R(x) + Q(x))$

Do $\deg(R + Q) = \deg(R - Q) = 3$ nên $P^2(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm

1. Hai nghiệm của $P^2(x) = 0$ ***là phân biệt***.

Khi đó P(x) =0 có ít nhất 2 nghiệm, mà degP = 3 nên P(x) = 0 sẽ có 3 nghiệm thực. Mặt khác do degR = 3 nên R(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm. Do vậy mà T(x) = 0 có ít nhất 6 nghiệm.

2. Hai nghiệm là nghiệm kép x = a. Do đó:

+) $R(x) - Q(x) = 0$ và $R(x) + Q(x) = 0$ đều nhận a làm nghiệm

Khi đó P(a) = Q(a) = R(a) = 0.

Theo định lý Bezout ta sẽ phân tích được:

$P(x) = (x - a)P_1(x); Q(x) = (x - 2)Q_1(x); R(x) = (x - a)R_1(x)$

với $P_1(x), Q_1(x), R_1(x)$ là các đa thức có hệ số cao nhất dương.

Do đó:

$P_1^2(x) + Q_1^{\ 2}(x) = R_1^{\ 2}(x)$

Xét $P_1(x) = ax^2 + bx + c; Q_1(x) = dx + e; R_1(x) = fx^2 + gx + h$

Đồng nhất hệ số của x^4 và x^3 trong khai triển ta được:

$a = f; 2ab = 2fg \Rightarrow b = g$

Do đó

$P_1(x) = ax^2 + bx + c; Q_1 = dx + e; R_1(x) = ax^2 + bx + h$

Ta có: $(dx+e)^2 = (h-c)(P_1(x) + R_1(x))$

Mà $\deg(P_1 + R_1) = 2$ nên $P_1(x) + R_1(x) = 2ax^2 + 2bx + c + h$ có nghiệm kép. Suy ra:

$b^2 = 2a(c+h)$

Nếu cả hai đa thức $P_1(x)$ và $R_1(x)$ đều không có nghiệm thực thì

$b^2 < 4ac; b^2 < 4ah$

Hay là $b^2 < 2a(c+h)$ (Vô lý)

Do đó một trong hai đa thức có 2 nghiệm. Điều này dẫn đến T(x) = 0 có 6 nghiệm.

+) Chỉ có một trong hai đa thức R(x) – Q(x); R(x) + Q(x) nhận a làm nghiệm.

Khi đó deg(R-Q) = deg (R+Q) = 3 nên R(x) – Q(x) = 0 hoặc R(x) + Q(x) sẽ có 3 nghiệm và $P^2(x) = 0$ cũng sẽ có ít nhất 3 nghiệm.

Do degP = 3 nên $P^2(x) = 0$ sẽ có 2 nghiệm hoặc có 6 nghiệm. Mà $P^2(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm nên $P(x)^2 = 0$ phải có 6 nghiệm hay là $P(x) = 0$ có 3 nghiệm.

Do đó T(x) = 0 có ít nhất 6 nghiệm.

Bài toán 18: Cho đa thức $P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2014} + ... + a_1x + a_0$ có hệ số thực với $P(1)P(2) \neq 0$ và $4\frac{P'(2)}{P(2)} > \frac{P'(1)}{P(1)} + 2016$. Giả sử P(x) có 2016 nghiệm thực, chứng minh rằng trong số đó, có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1;2)

Lời giải

Gọi $x_1, x_2, ..., x_{2016}$ là nghiệm của P(x) . Theo định lí Bezout ta có:

$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$

Khi đó:

$$P'(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)\left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + ... + \frac{1}{x-x_n}\right)$$

Do đó:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}$$

Ta sẽ đi phản chứng rằng P(x) không có nghiệm nào thuộc khoảng (1;2).

Ta có:

$$4.\frac{P'(2)}{P(2)} - \frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{i=1}^{2016}\left(\frac{4}{2-x_i} - \frac{1}{1-x_i}\right) = \sum_{i=1}^{2016}\left(\frac{2-3x_i}{(2-x_i)(1-x_i)}\right)$$

Do $x_i > 2$ hoặc $x_i < 1$ nên $(2-x_i)(1-x_i) > 0$. Ngoài ra:

$$\frac{2-3x_i}{(2-x_i)(1-x_i)} \leq 1, \forall x_i \notin (1;2)$$

Suy ra:

$4.\dfrac{P'(2)}{P(2)}-\dfrac{P'(1)}{P(1)}\le 2016$ (Vô lí). Do đó tồn tại ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1;2).

Bài toán 19 : Cho đa thức
$f(x)=x^{2017}+ax^2+bx+c$ có ba nghiệm nguyên x_1,x_2,x_3, trong đó $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng biểu thức sau là bội của 2017

$$(a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}+1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$$

Lời giải

Xét $f(x)=x^{2017}+ax^2+bx+c$

Nếu x_1,x_2,x_3 có cùng số dư khi chia cho 2017 thì ta có điều phải chứng minh.

Xét x_1,x_2,x_3 có số dư đôi một khác nhau đôi một khi choa cho 2017.

Theo định lý Fermat, ta có: $f(x)\equiv ax^2+x(b+1)+c$

Mặt khác: $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0\,\vdots\,2017$

Ta có: $f(x_1)-f(x_2)\equiv(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b+1)$

Suy ra: $ax_1+ax_2+b+1\,\vdots\,2017$

Tương tự: $ax_2+ax_3+b+1\,\vdots\,2017$

Do đó: $(ax_1+ax_2+b+1)-(ax_2+ax_3+b+1)=a(x_1-x_3)\,\vdots\,2017 \Rightarrow a\,\vdots\,2017$

Do $f(x_1)-f(x_2)\equiv(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b+1)$ nên $b+1\,\vdots\,2017$

Ngoài ra : $f(x_1)\equiv ax_1^2+x_1(b+1)+c\equiv 0 \pmod{2017}$ nên $c\,\vdots\,2017$

Suy ra: $a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}+1\equiv a+b+c+1\equiv 0\pmod{2017}$

Do đó ta có điều phải chứng minh .

Bài toán 20 : Cho a,b,c,d,e là các số thực. Chứng minh rằng nếu đa thức :
$P(x)=ax^2+(b+c)x+d+e$ có nghiệm thực thuộc khoảng $[1,+\infty)$, thì đa thức :
$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ cũng có nghiệm thực.

Lời giải

Gọi $x_0\in[1,+\infty)$ là nghiệm của phương trình : $ax^2+(b+c)x+d+e=0$

Nghĩa là : $ax_0^2+cx_0+e=-(bx_0+d)$

Xét hàm số : $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Khi đó : $f\left(\sqrt{x_0}\right)=\left(ax_0^2+cx_0+e\right)+\sqrt{x_0}\left(bx_0+d\right)$

Và $f\left(-\sqrt{x_0}\right)=\left(ax_0^2+cx_0+e\right)-\sqrt{x_0}\left(bx_0+d\right)$

Suy ra :

$$\begin{aligned}f\left(\sqrt{x_0}\right).f\left(-\sqrt{x_0}\right)&=\left(ax_0^2+cx_0+e\right)^2-x_0\left(bx_0+d\right)^2\\&=\left(ax_0^2+cx_0+e\right)^2-x_0\left(ax_0^2+cx_0+e\right)^2\\&=\left(ax_0^2+cx_0+e\right)^2\left(1-x_0\right)\le 0\end{aligned}$$

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[-\sqrt{x_0},\sqrt{x_0}\right]$

Vậy nên đa thức $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có nghiệm thực thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 21 (VMO 1991). Cho biết đa thức $P(x)=x^{10}-10x^9+39x^8+a_7x^7+...+a_1x+a_0$, với các giá trị nhất định của $a_0,a_1,...a_7$, có 10 nghiệm thực. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều nằm trong khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $x_1,x_2,...,x_{10}$ là 10 nghiệm của đa thức $P(x)$. Theo định lí Viet có:

$\sum_{i=1}^{10}x_i=10$ (1) ; $\sum_{i,j=1}^{10}x_ix_j=39$. Từ đó $100=\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{10}x_i^2+2.39\Rightarrow\sum_{i=1}^{10}x_i^2=22$ (2)

Ta biến đổi: $\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2=\sum_{i=1}^{10}(x_i^2-2x_i+1)=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-2\sum_{i=1}^{10}x_i+10$.

Từ đó và (1), (2) ta có $\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2=22-20+10=12$.

Vậy với mỗi $i(1\le i\le 10)$ thì $(x_i-1)^2\le 12<12+\frac{1}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2$.

+) Nếu $x_i-1\ge 0$ thì $x_i<1+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$.

+) Nếu $x_i-1<0$ thì $1-x_i<\frac{7}{2}\Rightarrow x_i>-\frac{5}{2}$.

Bài toán 22 (VMO 2009). Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương $n, a^n+b^n+c^n$ là số nguyên. Chứng minh tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là 3 nghiệm của phương trình $x^3+px^2+qx+r=0$

Lời giải

Cách 1.

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $T_n=a^n+b^n+c^n$. Theo giả thiết $T_n\in\mathbb{Z},\forall n\ge 1$

Ta chứng minh các số $p=-(a+b+c),q=ab+bc+ca,r=abc$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Thật vậy, do định lí Viet đảo, các số a,b,c là nghiệm của phương trình $x^3+px^2+qx+r=0$. Hơn nữa $p=-T_1\in\mathbb{Z}$. Ta phải chứng minh $q,r\in\mathbb{Z}$. Ta có

$$T_1=-p$$
$$T_2=p^2-2q \quad (1)$$
$$T_3=-p^3+3pq-3r \quad (2)$$
$$T_{n+3}=-pT_{n+2}-qT_{n+1}-rT_n,\forall n\ge 1 \quad (3)$$

Do $T_2,p\in\mathbb{Z}$ nên từ $(1)\Rightarrow 2q\in\mathbb{Z}$. Từ $(2)\Rightarrow 2pT_3=-2p^4+6p^2q-6pr\Rightarrow 6pr\in\mathbb{Z}$

Từ (3) cho $n=1$ ta được $T_4=-pT_3-qT_2-rT_1=p^4-4p^2q+4pr+2q^2$

$\Rightarrow 3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2 \Rightarrow 6q^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \in \mathbb{Z}$. Do đó, kết hợp với (2) ta có $3r \in \mathbb{Z}$, suy ra r có dạng $r = \frac{m}{3}, m \in \mathbb{Z}$ (4). Mặt khác từ (3) ta có $rT_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$.

Kết hợp với (4) ta có $mT_n \equiv 0 \pmod 3, \forall n \geq 1$ (5).

- Nếu tồn tại n sao cho $(T_n, 3) = 1$ thì từ (5) suy ra $m \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow r \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $T_n \equiv 0 \pmod 3, \forall n \geq 1$ thì $p = -T_1 \equiv 0 \pmod 3$ và $T_3 \equiv 0 \pmod 3$ nên từ (2) suy ra $r \in \mathbb{Z}$.

Cách 2.

Từ giả thiết ta có $a+b+c, a^2+b^2+c^2, a^4+b^4+c^4 \in \mathbb{Z}$ (1), suy ra

$$2(ab+bc+ca),\ 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \in \mathbb{Z}.$$

Áp dụng hằng đẳng thức: $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ với bộ số $(x,y,z) = (a,b,c)$ và (a^2,b^2,c^2) ta suy ra $6abc \in \mathbb{Z}$ và $6a^2b^2c^2 \in \mathbb{Z}$.

Đặt $6abc = k \Rightarrow 6a^2b^2c^2 = \frac{k^2}{6} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6|k$ và $abc \in \mathbb{Z}$ (2).

Từ đẳng thức $2(ab+bc+ca)^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + 4abc(a+b+c)$, ta suy ra

$$2(ab+bc+ca)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Đặt $2(ab+bc+ca) = q \Rightarrow 2(ab+bc+ca)^2 = \frac{q^2}{2} \Rightarrow 2|q$ và $ab+bc+ca \in \mathbb{Z}$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ ta có điều phải chứng minh.

Cách 3.

Ta xét bài toán: Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, a^n+b^n là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q sao cho a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$

Theo định lí Viet, rõ ràng điều phải chứng minh tương đương với việc chứng minnh $a+b$ và $a.b$ là số nguyên. $a+b$ hiển nhiên nguyên theo điều kiện đề bài.

Ngoài ra ta có $2ab=(a+b)^2-(a^2-b^2)$ là số nguyên. Đến đây, ta có thể tiếp tục dùng hằng đẳng thức này để suy ra $2a^2b^2$ cũng là số nguyên: $2a^2b^2=(a^2+b^2)-(a^4+b^4)$

<u>Bổ đề.</u> Nếu x là số thực sao cho $2x$ và $2x^2$ là các số nguyên thì x là số nguyên.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $2x=k$ nguyên, nhưng x không nguyên. Khi đó k là số nguyên lẻ:

$k=2m+1$. Suy ra $x=m+\frac{1}{2}$

Nhưng khi đó $2x^2=2(m+\frac{1}{2})^2=2m^2+2m+\frac{1}{2}$ không nguyên. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là x nguyên.

Như vậy, theo bổ đề thì ab nguyên và ta suy ra điều phải chứng minnh. Từ phép chứng minh ta cũng suy ra kết quả mạnh hơn:

Nếu $a+b, a^2+b^2, a^4+b^4$ là các số nguyên thì a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ với p, q là các số nguyên nào đó (và do đó a^n+b^n nguyên dương với mọi n nguyên dương). Điều đó cũng có nghĩa là ta chỉ cần dùng giả thiết của bài toán đến $n=4$. Ví dụ $a=\frac{\sqrt{2}}{2}, b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ cho thấy $k=4$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện: Nếu a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện a^n+b^n là số nguyên với mọi $n=1,2...,k$ thì a^n+b^n nguyên với mọi n nguyên dương.

Trở lại với bài toán, ta chỉ cần chứng minh $a+b+c, ab+bc+ca$ và abc nguyên.

Theo điều kiện đề bài thì $a+b+c$ là số nguyên. Tiếp theo ta có

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$ là số nguyên.

Tương tự như lời hướng dẫn gải trên, ta muốn chứng minh rằng $2(ab+bc+ca)^2$ cũng là số nguyên.

Từ đó dùng bổ đề suy ra $ab+bc+ca$ là số nguyên

Ta có $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a^2+b^2+c^2)-(a^4+b^4+c^4)$

và $2(ab+bc+ca)^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4abc(a+b+c)$ (1)

Vì $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (2)

Từ đây, do $a+b+c, a^2+b^2+c^2, a^3+b^3+c^3$ và $2(ab+bc+ca)$ là số nguyên nên ta suy ra $6abc$ là số nguyên (ta nhân (2) với $2!$). Từ đó, nhân (2) với 3 ta thu được

$$6(ab+bc+ca)^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+12abc(a+b+c)$$ là số nguyên.

Như vậy $2(ab+bc+ca)$ và $6(ab+bc+ca)^2$. Áp dụng cách chứng minh như bổ đề nêu trên, ta suy ra $ab+bc+ca$ là số nguyên. Từ đây, thay vào (2) ta có $3abc$ là số nguyên.

Tiếp theo, ta ử dụng hằng đẳng thức tương tự (2)

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$

với chú ý $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ là số nguyên ta suy ra $6a^2b^2c^2$ là số nguyên.

Từ $6abc$ và $6a^2b^2c^2$ là số nguyên, bằng cách chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra abc là số nguyên. Bài toán được giải quyết hoàn toán.

Bài toán 23: Cho đa thức $f(x)=x^2+ax+b; a,b\in\mathbb{R}$. Gỉa sử phương trình $f(f(x))=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt và tổng của hai trong bốn nghiệm đó bằng -1. Chứng minh rằng $b\le-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra phương trình $f(x)=0$ phải có 2 nghiệm thực x_1,x_2. Phương trình $f(f(x))=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $x_{1,2}\ge-\frac{\Delta}{4}$, trong đó $\Delta=a^2-4b$. Khi đó $-a=x_1+x_2\ge-\frac{\Delta}{2}\Rightarrow 4b\le a^2-2a$ $(*)$

Gọi y_1,y_2,y_3,y_4 là 4 nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$. Giả sử y_1,y_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2+ax+b-x_1=0$ và y_3,y_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2+ax+b-x_2=0$

Từ giả thiết, giả sử $y_1+y_2=-1\Rightarrow a=1$. Từ $(*)\Rightarrow b\le -\frac{1}{4}$. Nếu $y_1+y_3=-1$ thì $y_1^2+y_2^2\ge \frac{1}{2}$.

Ta có $y_1^2+ay_1+b-x_1=0$ và $y_3^2+ay_3+b-x_2=0$, suy ra

$y_1^2+y_3^2+2b=0\Rightarrow b=-\frac{y_1^2+y_3^2}{2}\le -\frac{1}{4}$

Bài toán 24: Cho số nguyên dương chẵn n, xét các đa thức $P(x)$ với hệ số thực

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$$

sao cho $P(x)$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a_1^2+a_2^2+...+a_{n-1}^2$.

Lời giải

Nếu $n=2$ thì $P(x)=x^2+a_1x+1$ có nghiệm khi $T=a_1^2\ge 4$.

Nếu $n>2$, gọi x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì $x_0\ne 0$ và $-\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_0^i=x_0^n+1>0$. Do đó tồn tại các số a_i $(1\le i\le n-1)$ không đồng thời bằng 0. Ta có

$$A=\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_0^i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}}=\frac{\left(x_0^n+1\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}}$$

Do $x_0^n+1\ge x_0^{n-2i}+x_0^{2i},\forall i=\overline{1,\frac{n}{2}-1}$ nên cộng các bất đẳng thức này, suy ra

$$\frac{n-2}{4}\left(x_0^n+1\right)\ge \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}x_0^{2i}\Rightarrow \frac{n-2}{4}\left(x_0^n+1\right)^2\ge \sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}-x_0^n\Rightarrow \frac{n-1}{4}\left(x_0^n+1\right)^2\ge \sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}+\frac{1}{4}\left(x_0^n-1\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{4}\left(x_0^n+1\right)^2\ge \sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}\Rightarrow A\ge \frac{4}{n-1}$$

Xét đa thức $P(x)=x^n-\frac{2}{n-1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x\right)+1$ có một nghiệm bằng 1 và $A=\frac{4}{n-1}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{4}{n-1}$.

Bài toán 25 (RUSSIAN MO 2001): Cho đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c;\ a,b,c\in\mathbb{R}$ có 3 nghiệm thực phân biệt và đa thức $Q(x)=x^2+x+2001$. Chứng minh rằng

$P(2001) > \frac{1}{64}$, biết đa thức $P(Q(x))$ không có nghiệm thực.

Lời giải.

Giả sử $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), r_i \in \mathbb{R}$. Khi đó $P(Q(x)) = \prod_{i=1}^{3}(x^2 + x + 2001 - r_i)$.

Vì $P(Q(x))$ không có nghiệm thực nên

$1 - 4(2001 - r_i) < 0, \forall i = \overline{1,3} \Rightarrow \frac{1}{4} < 2001 - r_i, \forall i = \overline{1,3}$.

Mặt khác $P(2001) = P(Q(0)) = \prod_{i=1}^{3}(2001 - r_i) > \frac{1}{64}$

III. Bài tập đề nghị

1. Cho đa thức $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$. Giả sử x_0 là nghiệm của đa thức P(x). Chứng minh rằng $|x_0| < 1 + \max_{0 \le i \le n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|$

2. Cho 2 đa thức với hệ số thực $f(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = x^2 + x + 2014$. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có 5 nghiệm thực phân biệt còn phương trình $f(g(x)) = 0$ không có nghiệm thực.
Chứng minh rằng $8\sqrt[3]{f(2014)} > 1$

3. Cho đa thức $P(x) = x^8 + 14x^4 + 1$. CMR : Có thể chia 8 nghiệm phức của đa thức này thành 2 bộ rời nhau sao cho với mỗi bộ đó, giả sử là a, b, c, d thì các giá trị $a + b + c + d$; $ab + ac + ad + bc + bd + cd$; $abc + abd + acd + bcd$; $abcd$ đều là các số thực.

4. Cho $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + 1$ có các hệ số không âm $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ và phương trình P(x) = 0 có n nghiệm thực. CMR : $P(2) \ge 3^n$.

5. Cho $a, b, c, d, m, n, p \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^3 + (m + b)x^2 + (n + c)x + p + d = 0$ có nghiệm thực $x_0 \ge 1$ thì phương trình $ax^6 + mx^5 + bx^4 + nx^3 + cx^2 + px + d = 0$ cũng có nghiệm thực.

6. Chứng minh rằng nếu các nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bc + c = 0$ đều là số thực thì $ab \le 0$.

7. Giả sử phương trình $a_0x^{2008} + a_1x^{2007} + ... + a_{2007}x + a_{2008} = 0$ có 2008 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng $2007a_1^2 > 4016a_0a_2$.

8. Giả sử phương trình $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0$ có nghiệm. Chứng minh rằng: $b^2 + (c-2)^2 > 3$.

C. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hoành Phò, Nguyễn Văn Nho, Nguyễn Tài Chung, Chuyên khảo Đa thức, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội 2013

2. Nguyễn Hữu Điển, Đa thức và ứng dụng, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2006

3. Nguyễn Văn Nho, Olympic Toán học châu Á – Thái Bình Dương, Nhà xuất bản giáo dục năm 2004

4. Nguyễn Văn Mậu, Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THPT, Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ, Nhà xuất bản giáo dục năm 2004

5. Văn Phú Quốc, Huỳnh Công Thái, Tinh lọc các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi luyện thi Olympic toán 11, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội năm 2013

6. Các nguồn tài liệu từ Internet: www.mathscope.org, www.mathlinhs.org, www.imo.org.yu.

D. KẾT LUẬN

Bài viết không phải là những điều gì mới mẻ, nó được thực hiện với mục đích cho thấy được mối quan hệ chặt chẽ giữa "đa thức" và "nghiệm của đa thức. Các ví dụ được tập hợp như một tài liệu để phục vụ công tác bồi dưỡng học sinh giỏi cũng như để chia sẻ một số kinh nghiệm ít ỏi mà tác giả tích lũy và học hỏi được qua quá trình rèn luyện của bản thân. Một lần nữa, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô giáo, quý đồng nghiệp và các em học sinh.