**CƠ HỌC HAMILTON (hamiltonian mechanics)**

Cơ học Hamilton là một cách phát biểu khác của cơ học cổ điển. Các công thức của cơ học Hamilton dẫn tới những nguyên lý bảo toàn bổ sung mà việc dẫn giải ra nó sẽ khó hơn nếu sử dụng các cách tiếp cận khác.

Trong cơ học Hamilton, một hệ thống vật lý cổ điển được mô tả bởi một tập hợp các tọa độ chính tắc $r = (q, p)$ . Các thành phần $q_i$ được gọi là tọa độ tổng quát và được chọn để loại bỏ các ràng buộc hoặc để tận dụng các đối xứng của bài toán và $p_i$ là mômen liên hợp của chúng.

Sự tiến triển theo thời gian của hệ được xác định duy nhất bởi phương trình Hamilton

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} & = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \dfrac{dq}{dt} & = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}$ là hàm Hamilton thường tương ứng với tổng năng lượng của hệ. Đối với hệ kín, nó là tổng của động năng và thế năng trong hệ.

Trong cơ học Newton, sự tiến triển theo thời gian thu được bằng cách tính toán tổng lực tác dụng lên mỗi chất điểm của hệ và từ định luật thứ hai của Newton, các diễn biến thời gian của cả vị trí và vận tốc được tính toán. Ngược lại trong cơ học Hamilton, sự tiến hóa theo thời gian thu được bằng cách tính toán hàm Hamilton của hệ trong các tọa độ tổng quát và chèn nó vào phương trình Hamilton. Cách tiếp cận này tương đương với cách được sử dụng trong cơ học Lagrange. Hàm Hamilton chính là biến đổi Legendre của hàm Lagrange. Do đó cả hai phương pháp đều đưa ra các phương trình giống nhau cho cùng một động lượng tổng quát. Động lực chính để sử dụng cơ học Hamilton thay vì cơ học Lagrange xuất phát từ cấu trúc tổng hợp của hệ thống Hamilton.

Trong khi cơ học Hamilton có thể được sử dụng để mô tả các hệ thống đơn giản như một quả bóng nảy, một con lắc hoặc một lò xo dao động trong đó năng lượng thay đổi từ động năng sang thế năng và ngược lại theo thời gian, sức mạnh của nó được thể hiện trong các hệ thống động lực học phức tạp hơn như quỹ đạo hành tinh trong cơ học thiên thể. Hệ thống càng có nhiều bậc tự do thì sự tiến triển theo thời gian của nó càng phức tạp.

Một cách giải thích đơn giản về cơ học Hamilton xuất phát từ ứng dụng của nó trên hệ một chiều bao gồm một chất điểm có khối lượng $m$. Hàm Hamilton có thể biểu diễn tổng năng lượng của hệ là tổng của động năng và thế năng được ký hiệu lần lượt là $T$ và $V$. Ở đây $q$ là tọa độ không gian và $p$ là động lượng $mv$. Ta có:

$$\mathcal{H} = T + V, \quad T = \frac{p^2}{2m}, \quad V = V(q),$$

$T$ là một hàm chỉ chứa $p$ trong khi $V$ là một hàm chỉ chứa $q$.

Trong ví dụ này, đạo hàm theo thời gian của động lượng $p$ bằng lực Newton và do đó, phương trình Hamilton đầu tiên có nghĩa lực bằng gradien âm của thế năng. Đạo hàm theo thời gian của $q$ là vận tốc và do đó phương trình Hamilton thứ hai có nghĩa là vận tốc của chất điểm bằng đạo hàm của động năng đối với động lượng của nó.

*Ví dụ: con lắc cầu.*

Con lắc cầu gồm vật khối lượng $m$ chuyển động không ma sát trên mặt cầu. Tọa độ cầu được sử dụng để mô tả vị trí của khối lượng theo $(r, \theta, \phi)$ trong đó $r = l$ là cố định. Hàm Hamilton là tổng động năng và thế năng:

$$H = \left[\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right] + [-mgl\cos\theta.]$$

Nếu viết theo các tọa độ $(\theta, \phi)$ và mô men động lượng $(P_\theta, P_\phi)$, hàm Hamilton có dạng

$$H = \frac{P_\theta^2}{2ml^2} + \frac{P_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Phương trình Hamilton cung cấp sự tiến hóa theo thời gian của tọa độ và mô men động lượng kết hợp trong bốn phương trình vi phân bậc nhất

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{ml^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{ml^2\sin^2\theta}, \quad \dot{P}_\phi = \frac{P_\phi^2}{ml^2\sin^3\theta}\cos\theta - mgl\sin\theta, \quad \dot{P}_\phi = 0.$$

Mô men động lượng $P_\phi$ tương ứng với thành phần thẳng đứng của mô men động lượng $L_z = l\sin\theta \times ml\phi\sin\theta$ là một hằng số của chuyển động. Đó là hệ quả của phép đối xứng quay của hệ quanh trục tung. Không có mặt trong hàm Hamilton, $\phi$ là một tọa độ tuần hoàn hàm ý bảo toàn mô men động lượng của nó.

Phương trình của Hamilton bao gồm $2n$ phương trình vi phân bậc nhất trong khi phương trình của Lagrange bao gồm $n$ phương trình bậc hai. Các phương trình Hamilton thường không làm giảm khó khăn trong việc tìm ra các nghiệm rõ ràng nhưng chúng vẫn mang lại một số ưu điểm. Có thể rút ra các kết quả lý thuyết quan trọng vì tọa độ và động lượng là các biến độc lập có vai trò gần như đối xứng.

**LÃ ĐỨC VIỆT**

**Tài liệu tham khảo**


1. J. H. Ginsberg, *Engineering Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
2. D. T. Greenwood, Advanced Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.