## CƠ HỌC LAGRANGE (lagrangian mechanics)

Cơ học Lagrange là một phương pháp phát biểu lại cơ học cổ điển, do nhà toán học và thiên văn học người Pháp-Ý Joseph-Louis Lagrange giới thiệu vào năm 1788.

Trong cơ học Lagrange, quỹ đạo của một hệ chất điểm tìm được bằng cách giải phương trình Lagrange có một trong hai dạng, hoặc là phương trình Lagrange loại 1, mà coi các điều kiện giới hạn (hoặc liên kết) như là các phương trình phụ thêm, thường sử dụng nhân tử Lagrange; hoặc phương trình Lagrange loại hai, trong đó kết hợp trực tiếp với các điều kiện liên kết bằng cách lựa chọn cẩn thận các tọa độ suy rộng. Trong mỗi trường hợp, một hàm số gọi là hàm Lagrange là một hàm của các tọa độ suy rộng, các đạo hàm của chúng theo thời gian, thời gian, và chứa các thông tin về động lực của hệ.

Không có một hiện tượng vật lý mới nào được giới thiệu trong cơ học Lagrange so với cơ học Newton. Các định luật của Newton bao gồm cả những lực không bảo toàn như ma sát, tuy nhiên chúng phải chứa các lực liên kết cụ thể và do vậy phù hợp nhất khi miêu tả trong hệ tọa độ Descartes. Cơ học Lagrange miêu tả rất tốt hệ gồm những lực bảo toàn và cho những lực liên kết được miêu tả trong hệ tọa độ bất kỳ. Các lực tiêu tán và dẫn hướng được xét đến bằng cách phân tích lực thành tổng các lực thế năng và phi thế năng, dẫn tới tập hợp các phương trình Euler-Lagrange được sửa đổi cho hệ. Có thể chọn các tọa độ suy rộng sao cho thuận tiện cho sự áp dụng tính đối xứng của hệ hoặc cho tính chất hình học của các liên kết, giúp cho việc giải phương trình chuyển động trở lên đơn giản hơn.

Cơ học Lagrange có vai trò quan trọng không chỉ áp dụng rộng rãi vào các ứng dụng thực tế, nó cũng là công cụ quan trọng để tìm hiểu sâu hơn các lý thuyết vật lý. Mặc dù Lagrange lúc đầu chỉ tìm cách miêu tả cơ học cổ điển bằng ngôn ngữ phổ quát hơn trong chuyên luận của ông Mécanique analytique (Cơ học giải tích), về sau nguyên lý Hamilton dùng để tìm ra phương trình Lagrange đã được các nhà vật lý nhận thấy có thể áp dụng cho các lý thuyết vật lý cơ bản, đặc biệt là đối với cơ học lượng tử và thuyết tương đối.

Cơ học Lagrange được sử dụng rộng rãi để giải các vấn đề cơ học trong vật lý và kỹ thuật khi không thuận tiện dùng các công thức của Newton trong cơ học cổ điển để giải. Cơ học Lagrange áp dụng cho động lực của các chất điểm, các trường được miêu tả sử dụng hàm Lagrange. Phương trình Lagrange cũng được sử dụng cho vấn đề tối ưu hóa cho hệ động lực. Trong cơ học, phương trình Lagrange loại hai được sử dụng nhiều hơn so với loại một.

Việc tính toán chuyển động của chất điểm sử dụng cơ học Newton đòi hỏi giải phương trình lực liên kết biến đổi theo theo thời gian để giữ cho chất điểm tuân theo chuyển động có ràng buộc (ví dụ sức căng của thanh nối quả lắc). Khi dùng cơ học Lagrange để giải cùng một vấn đề này, dựa vào quỹ đạo của chất điểm mà có thể thuận tiện lựa chọn một hệ các tọa độ suy rộng độc lập cho phép miêu tả hoàn toàn chuyển động khả dĩ của chất điểm. Cách lựa chọn này loại bỏ các lực liên kết cần thiết trong phương trình chuyển động của chất điểm. Có ít phương trình hơn do không còn phải cần tính ảnh hưởng của các điều kiện liên kết lên chất điểm tại từng thời điểm cụ thể.

Đối với một lớp rộng các hệ thống vật lý, nếu kích thước và hình dạng của một vật nặng là bỏ qua được, cơ hệ sẽ trở lên đơn giản hơn khi coi vật là một chất điểm. Một hệ có $N$ chất điểm với khối lượng lần lượt bằng $m_1, m_2, \ldots, m_N$, mỗi chất điểm có một véc tơ vị trí, ký hiệu bằng $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$. Tọa độ Descartes thường là đủ, do vậy $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, v.v. Trong không gian ba chiều, mỗi véc tơ vị trí có ba tọa độ thành phần xác định duy nhất vị trí của điểm, do vậy có $3N$ tọa độ xác định duy nhất cấu hình của hệ. Đây là những điểm cụ thể trong không gian để định vị vị trí của các chất điểm, một điểm tổng quát trong không gian được viết là $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Vận tốc của mỗi chất điểm và bằng đạo hàm thời gian của vị trí, do đó $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$, $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt$,....

Trong cơ học Newton, phương trình chuyển động được thiết lập dựa trên các định luật của Newton. Định luật hai nói rằng "tổng lực tác dụng bằng khối lượng nhân với gia tốc", $\Sigma F = md^2r/dt^2$, áp dụng cho mỗi chất điểm. Đối với hệ có $N$ chất điểm trong không gian 3 chiều, có $3N$ phương trình vi phân thường bậc hai theo vị trí của các chất điểm cần phải giải.

Thay vì lực, cơ học Lagrange sử dụng khái niệm năng lượng xác định trong hệ. Đại lượng trung tâm của cơ học Lagrange là hàm Lagrange, một hàm tổng kết tính động lực của toàn bộ cơ hệ. Nói chung, hàm Lagrange có đơn vị của năng lượng, nhưng không có một biểu thức cụ thể nào cho mọi hệ vật lý. Bất kỳ hàm nào tạo ra phương trình chuyển động đúng, mà tuân theo các định luật vật lý, có thể coi là hàm Lagrange. Tuy vậy có thể xây dựng một biểu thức tổng quát cho một lớp lớn các ứng dụng. Hàm Lagrange của một hệ chất điểm được xác định bằng.

$$L = T - V,$$

với

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2$$

là tổng động năng của các chất điểm trong hệ và $V$ là thế năng của hệ.

Động năng là năng lượng có được từ chuyển động của hệ, và $v_k = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k$ là bình phương độ lớn của vận tốc, tương đương với tích vô hướng của véc tơ vận tốc với chính nó. Động năng là hàm chỉ của vận tốc $\mathbf{v}_k$, không phụ thuộc vào vị trí $\mathbf{r}_k$ hay thời gian $t$, nghĩa là $T = T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots)$.

Thế năng của hệ phản ánh năng lượng trong tương tác giữa các chất điểm, ví dụ như năng lượng mà một chất điểm bất kỳ chịu tác động từ những chất điểm khác trong hệ cũng như chịu các ngoại lực bên ngoài. Đối với lực bảo toàn (ví dụ lực hấp dẫn Newton), nó là hàm chỉ của vectơ vị trí của chất điểm, do vậy $V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$. Đối với những lực không bảo toàn mà có thể dẫn ra từ thế năng thích hợp (ví dụ thế năng điện từ), vận tốc cũng sẽ xuất hiện, $V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$. Nếu có một trường ngoài hoặc lực bên ngoài tác động thay đổi theo thời gian, thế năng cũng sẽ thay đổi theo thời gian, do vậy nói chung $V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, t)$.

Một hoặc nhiều chất điểm có thể chịu một hoặc nhiều liên kết holonom, ví dụ như liên kết được miêu tả bằng phương trình có dạng $f(\mathbf{r}, t) = 0$. Nếu số lượng liên kết trong hệ bằng $C$, thì mỗi liên kết có phương trình, $f_1(\mathbf{r}, t) = 0$, $f_2(\mathbf{r}, t) = 0, \ldots, f_C(\mathbf{r}, t) = 0$, mỗi phương trình có thể áp dụng cho bất kỳ chất điểm nào. Nếu chất điểm $k$ chịu liên kết (ràng buộc) $i$, thì $f_i(\mathbf{r}_k, t) = 0$. Ở thời điểm bất kỳ, tọa độ của một chất điểm chịu liên kết được liên hệ với nhau và không độc lập hoàn toàn. Phương trình liên kết xác định quỹ đạo khả dĩ của các chất điểm, nhưng không xác định vị trí hay vận tốc của chúng tại thời điểm bất kỳ. Liên kết phi holonom phụ thuộc vào vận tốc, gia tốc, hoặc đạo hàm bậc cao của vị trí của chất điểm. Cơ học Lagrange chỉ được áp dụng đối với hệ có liên kết holonom. Liên kết phi holonom đòi hỏi cách xử lý đặc biệt, và có thể phải quay lại khuôn khổ của cơ học Newton hoặc sử dụng phương pháp khác.

Nếu $T$ hoặc $V$ hoặc cả hai phụ thuộc rõ vào thời gian do những điều kiện ràng buộc biến đổi theo thời gian hoặc do ảnh hưởng của bên ngoài, hàm Lagrange $L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, t)$ là hàm hiện phụ thuộc thời gian. Nếu cả thế năng và động năng không phụ thuộc vào thời gian, thì hàm Lagrange $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$ là hàm hiện độc lập thời gian. Trong cả hai trường hợp, hàm Lagrange luôn luôn ẩn chứa tính phụ thuộc thời gian thông qua tọa độ suy rộng.

Trong mỗi phương trình ràng buộc, một tọa độ là dư do nó được xác định từ hai tọa độ kia. Số tọa độ độc lập do vậy bằng $n = 3N - C$. Chúng ta có thể biến đổi mỗi véc tơ vị trí về một tập hợp chung chứa $n$ tọa độ suy rộng, viết một cách thuận tiện là $n$-bộ $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, bằng cách biểu diễn mỗi véc tơ vị trí, và do đó các tọa độ vị trí, như là hàm số theo các tọa độ suy rộng và thời gian

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(\mathbf{q}, t) = (x_k(\mathbf{q}, t), y_k(\mathbf{q}, t), z_k(\mathbf{q}, t)).$$

Véc tơ $\mathbf{q}$ là một điểm trong không gian cấu hình của hệ. Đạo hàm thời gian của tọa độ suy rộng được gọi là vận tốc suy rộng, và đối với mỗi chất điểm phép biến đổi của vectơ vận tốc, đạo hàm toàn phần của vị trí theo thời gian bằng

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \quad \mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}.$$

Đối với vận tốc suy rộng $\mathbf{v}_k$, động năng trong tọa độ suy rộng phụ thuộc vào vận tốc suy rộng, tọa độ suy rộng, và thời gian nếu véc tơ vị trí phụ thuộc hiện vào thời gian do các liên kết ràng buộc biến đổi theo thời gian, do vậy $T = T(\mathbf{q}, d\mathbf{q}/dt, t)$. Với các định nghĩa này ta có phương trình Euler–Lagrange, hay phương trình Lagrange loại 2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

là các kết quả toán học từ phép tính biến phân, mà cũng được áp dụng trong cơ học. Thay thế vào hàm Lagrangian $L(\mathbf{q}, d\mathbf{q}/dt, t)$, thu được phương trình chuyển động của hệ. Số lượng phương trình đã giảm đi so với của cơ học Newton, từ $3N$ xuống còn $n = 3N - C$ phương trình vi phân thường bậc hai trong hệ tọa độ suy rộng. Các phương trình này không còn bao gồm các lực liên kết, chỉ có các lực phi liên kết mới phải tính đến.

Mặc dù phương trình chuyển động có chứa đạo hàm riêng, các kết quả của đạo hàm riêng vẫn là phương trình vi phân thường trong tọa độ vị trí của các chất điểm. Đạo hàm thời gian toàn phần ký hiệu bằng $d/dt$ thường bao gồm lấy vi phân hàm ẩn. Các phương trình này có dạng tuyến tính theo hàm Lagrange, nhưng nói chung là hệ phương trình phi tuyến theo tọa độ.

**LÃ ĐỨC VIỆT**

**Tài liệu tham khảo**


1. J. H. Ginsberg, *Engineering Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
2. D. T. Greenwood, Advanced Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.