COMPACT (compact)

Trong toán học, cụ thể là trong chuyên ngành tô pô đại cương, tính compact là một tính chất mở rộng của khái niệm về một tập con đóng (tức là chứa tất cả các điểm giới hạn của nó) và bị chặn (tức là, nằm trọn trong một hình cầu đủ lớn) của không gian Euclid.

Ví dụ đơn giản nhất về tập compact bao gồm: một khoảng đóng $[a, b]$, một hình chữ nhật hoặc một tập hữu hạn các điểm. Khái niệm compact được định nghĩa cho các không gian tô pô tổng quát hơn không gian Euclid theo nhiều cách khác nhau như sau.

- Một không gian tô pô X được gọi là *compact dãy* nếu mọi dãy vô hạn trong X có một dãy con vô hạn hội tụ đến một điểm nào đó của X.
- Một không gian tô pô X được gọi là *compact điểm giới hạn* nếu mọi tập con vô hạn trong X có một điểm giới hạn trong X.

Định lý Bolzano–Weierstrass phát biểu rằng một tập con của không gian Euclid là compact dãy khi và chỉ khi nó là đóng và bị chặn.

Do đó, nếu ta chọn vô số điểm trong khoảng đóng $[0, 1]$, thì một số điểm trong đó sẽ tiến dần đến một điểm nào đó cũng thuộc đoạn $[0, 1]$. Điều này không đúng với khoảng mở $(0, 1)$, chẳng hạn dãy $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \cdots$ tiến dần tới 0. Vì lý do này, khoảng mở $(0, 1)$ không là compact dãy.

Bản thân không gian Euclid không phải là compact dãy vì nó không bị chặn. Cụ thể là dãy các điểm $0, 1, 2, 3, \ldots$ không bị chặn và nó không có dãy con nào hội tụ về bất kỳ số thực nào.

Trong một không gian mêtric hai khái niệm compact dãy và compact điểm giới hạn là tương đương. Tuy nhiên, trong các không gian tô pô nói chung, các định nghĩa khác nhau về tính compact không nhất thiết phải tương đương. Định nghĩa chuẩn thường được dùng ngày nay phát biểu như sau:

Một không gian tô pô X được gọi là *compact* nếu với mọi họ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in C}$ các tập con mở của X, sao cho $X = \cup_{\alpha \in C} X_\alpha$ ta có thể chọn ra một tập hữu hạn $F \subseteq C$ sao cho $X = \cup_{\alpha \in F} X_\alpha$.

Có thể phát biểu bằng lời ngắn gọn hơn rằng một không gian là compact nếu từ mọi phủ mở của nó đều có thể trích ra một phủ con hữu hạn.

Một tập con A của không gian tô pô X được gọi là *tập con compact* nếu A, với tô pô cảm sinh từ X, là không gian tô pô compact.

Định nghĩa khái niệm compact theo cách tinh tế hơn như trên, được Pavel Alexandrov và Pavel Urysohn đưa ra vào năm 1929. Nó cho thấy không gian compact như là mở rộng của các tập hợp hữu hạn. Định lý Heine–Borel nói rằng một tập trong không gian Euclid là compact khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

Compact là một đặc tính mạnh mẽ của không gian, và được sử dụng theo nhiều cách và trong nhiều lĩnh vực toán học khác nhau. Một cách là thông qua các nguyên tắc từ địa phương đến toàn cục. Ta thiết lập một số tính chất hoặc ràng buộc địa phương đối với một hàm số hoặc các đại lượng khác, sau đó sử dụng tính compact để nâng các tính chất hoặc ràng buộc địa phương lên toàn cục. Có nhiều định lý được phát biểu theo hướng này chẳng hạn như định lý nói rằng một hàm liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì liên tục đều. Ở đây liên tục là một khái niệm có tính chất "địa phương", trong khi đó liên tục đều có tính chất "toàn cục".

Cách thứ hai là dùng tính compact để xác định giá trị cực đại hoặc cực tiểu của một hàm số, điều này đặc biệt hữu ích trong các phép tính biến phân. Cách thứ ba là khôi phục một phần khái niệm về giới hạn khi đối phó với dãy không hội tụ, bằng cách chấp nhận sự cần thiết phải chuyển sang xét dãy con của dãy ban đầu. Tuy nhiên, cần lưu ý rằng các dãy con khác nhau có thể hội tụ đến các giới hạn khác nhau; tính compact chỉ đảm bảo sự tồn tại của một điểm giới hạn, nhưng không đảm bảo tính duy nhất của nó.

TÍNH CHẤT CỦA KHÔNG GIAN COMPACT

Ta có một số tính chất quan trọng của không gian compact và tập compact.

- Một tập hữu hạn với tô pô bất kỳ luôn compact.
- Hợp của hữu hạn các tập con compact là compact.
- Giao của một họ bất kỳ các tập con compact của một không gian Hausdorff là compact.
- Tập con đóng của một không gian compact là compact.

- Tập con compact của không gian Hausdorff là đóng.
- Một họ các tập con $\{X_\alpha\}_{\alpha \in C}$ của không gian tô pô X được gọi là có *tính chất giao hữu hạn* nếu như với mọi tập hữu hạn $F \subseteq C$, ta có $\cap_{\alpha \in F} X_\alpha \neq \emptyset$. Khái niệm compact có thể đặc trưng qua tính chất giao hữu hạn như sau: không gian tô pô X là compact nếu mọi họ các tập con đóng $\{X_\alpha\}_{\alpha \in C}$ có tính chất giao hữu hạn đều có giao khác rỗng.
- Ảnh của một tập compact qua một ánh xạ liên tục giữa hai không gian tô pô là compact. Trong trường hợp đặc biệt nếu $f\colon X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên một không gian compact X thì nó đạt cực đại và cực tiểu trên đó, tức là tồn tại u, v thuộc X sao cho $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ với mọi $x \in X$.
- Tích của một họ tùy ý các không gian compact, cùng với tô pô tích trên đó là compact. Kết quả này là định lý mang tên nhà toán học Nga Andrey Nikolayevich Tikhonov.

Compact hóa

Một câu hỏi tự nhiên rằng liệu mọi không gian có thể coi là không gian con của một không gian compact? Chẳng hạn đường thẳng thực $\mathbb{R}$ đồng phôi với khoảng mở $(0, 1)$ và do đó có thể coi như không gian con của đoạn $[0, 1]$- một không gian compact.

Compact hóa là quá trình hoặc kết quả của việc biến một không gian tô pô thành một không gian compact. Có nhiều phương pháp compact hóa khác nhau, nhưng mỗi phương pháp là một cách kiểm soát không cho các điểm "chạy ra vô cùng" bằng cách thêm vào một số "điểm ở vô cùng" hoặc ngăn chặn sự "chạy ra" đó. Dưới đây chúng ta sẽ mô tả hai loại compact hóa của đường thẳng thực $\mathbb{R}$.

Ta có thể compact hóa $\mathbb{R}$ bằng cách thêm một điểm vào mỗi đầu của nó, $-\infty$ và $+\infty$. Không gian thu được, gọi là *đường thẳng thực mở rộng* $[-\infty, +\infty]$. Có thể định nghĩa một tô pô trên đường thẳng thực mở rộng, việc này về cơ bản là định nghĩa sự hội tụ đến $-\infty$ hoặc $+\infty$.

Đường thẳng thực mở rộng là compact: bất kỳ dãy số x_n nào của các số thực mở rộng sẽ có một dãy con hội tụ đến $-\infty$, hội tụ đến $+\infty$ hoặc hội tụ đến một số hữu hạn. Do đó, sử dụng compact hóa của đường thẳng thực, chúng ta có thể mở rộng khái niệm giới hạn, bằng cách không còn yêu cầu rằng giới hạn đó phải là một số thực. Mặc dù có một số hạn chế đối với việc xử lý các số thực mở rộng thay vì các số thực thông thường (chẳng hạn ta luôn có thể cộng hai số thực thông thương, nhưng tổng của $-\infty$ và $+\infty$ là không xác định), khả năng có thể gán giới hạn cho một dãy mà đáng lẽ là phân kỳ là rất hữu ích, đặc biệt là trong lý thuyết về chuỗi vô hạn và tích phân suy rộng.

Một cách compact hóa khác của $\mathbb{R}$ là thêm vào một "điểm ở vô cực" duy nhất mà ta sẽ ký hiệu là ∞. Kết quả nhận được có thể được coi là một vòng tròn (compact như một tập con đóng và bị chặn của mặt phẳng Euclid). Mọi dãy chạy ra vô cùng trong $\mathbb{R}$ sẽ hội tụ về ∞ trong không gian compact hóa này.

Một cách trực quan, quá trình này có thể được hình dung như sau: đầu tiên thu nhỏ $\mathbb{R}$ thành khoảng mở $(-\pi, \pi)$ trên trục hoành; sau đó uốn cong các đầu của khoảng này lên trên (theo chiều dương trục tung) và di chuyển chúng về phía nhau, cho đến khi bạn nhận được một vòng tròn bị khuyết một điểm ở trên cùng. Điểm này là điểm mới "ở vô cùng" của chúng ta và được ký hiệu là ∞; thêm nó vào sẽ làm cho vòng tròn khuyết trở thành compact. Không gian được xây dựng theo cách này được gọi là *compact hóa một điểm Alexandrov* của đường thẳng thực.

VŨ THẾ KHÔI

Tài liệu tham khảo

1. P. S. Aleksandrov and P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts: dédié à D. Egoroff*, Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 1929.
2. T. Gowers, J. Barrow-Green and I. Leader (editors), *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
3. J. L. Kelley, *General Topology*, Dover, New York, 2017.