CÔNG THỨC FRENET (Frenet formula)

Trong hình học vi phân, công thức Frenet mô tả các các đặc tính hình học của một đường cong khả vi trong không gian Euclid ba chiều $\mathbb{R}^3$. Cụ thể hơn, các công thức mô tả mối quan hệ của đạo hàm của các véc tơ tiếp tuyến, pháp tuyến và song pháp tuyến đơn vị.

Công thức Frenet được đặt tên theo nhà toán học người Pháp Jean Frédéric Frenet, người đã phát hiện ra chúng trong luận án của ông năm 1847. Trong một số tài liệu, công thức này còn được gọi là công thức Frenet-Serret vì một nhà toán học người Pháp khác là Joseph Alfred Serret cũng tìm ra một cách độc lập.

Đường cong trong không gian Euclid ba chiều $\mathbb{R}^3$ được cho bởi một hàm số

$$\mathbf{r}\colon I = (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^3.$$

Ta có thể coi $\mathbf{r}(t)$ là vị trí của một chất điểm chuyển động trong không gian tại thời điểm t. Chúng ta chỉ xét những đường cong *chính quy*, tức là những đường cong với $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Gọi $s(t)$ là độ dài cung mà chất điểm đã đi được dọc theo đường cong trong thời gian từ khi bắt đầu $(t = 0)$ cho đến thời điểm t. Khi đó ta có

$$s(t) = \int_0^t ||\mathbf{r}'(t)||dt.$$

Hơn nữa, vì chúng ta đã giả sử rằng $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, nên $s(t)$ là một hàm đơn điệu tăng chặt. Do đó tồn tại hàm ngược của $s(t)$, tức là ta có thể giải t như một hàm của s và viết $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s))$.

Có nhiều cách khác nhau để viết phương trình tham số của một đường cong. Khi dùng tham số s là độ dài cung ở trên, ta nói rằng đường cong được *tham số hóa theo độ dài cung*. Một tính chất đặc trưng của đường cong tham số hóa theo độ dài cung là véc tơ tiếp xúc tại mọi điểm có độ dài bằng 1. Thật vậy ta có

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||},$$

do đó

$$||\frac{d\mathbf{r}}{ds}|| = \frac{||\mathbf{r}'(t)||}{||\mathbf{r}'(t)||} = 1.$$

Với một đường cong chính quy, tham số hóa theo độ dài cung $\mathbf{r}(s)$, ta có thể định nghĩa một hệ trực chuẩn các vectơ tại mỗi điểm dọc theo đường cong như sau.

Véc tơ tiếp tuyến đơn vị

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Đại lượng $\kappa(s) = ||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||$ được gọi là *độ cong* của đường cong $\mathbf{r}$ at s.

Tại những điểm mà $\kappa(s) \neq 0$, ta định nghĩa *véc tơ pháp tuyến đơn vị*

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}.$$

Véc tơ song pháp tuyến $\mathbf{B}$ được định nghĩa như tích véc tơ: $\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Do $||\mathbf{T}(s)|| = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 1$, ta có

$$\frac{d\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle}{ds} = 2\langle \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{T}(s) \rangle = 0.$$

Như vậy $\mathbf{T}$ và $\mathbf{N}$ là các véc tơ đơn vị vuông góc với nhau. Ta suy ra tại mỗi điểm của đường cong, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ lập thành một hệ cơ sở trực chuẩn gọi là *khung Frenet*.

Công thức Frenet biểu diễn đạo hàm của các véc tơ trong hệ cơ sở $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ thông qua chính các véc tơ này:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N},$$
$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B},$$
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

Ở đây đại lượng τ được gọi là *độ xoắn* của đường cong.

Công thức Frenet có thể viết lại ở dạng ma trận như sau:

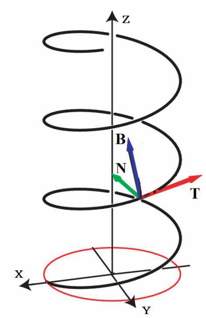
$$\begin{bmatrix}\mathbf{T}'\\ \mathbf{N}'\\ \mathbf{B}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}.$$

Ví dụ.

Đường xoắn ốc cho bởi phương trình tham số hóa theo độ dài:

$$\mathbf{r}(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}), \quad s \in \mathbb{R},$$

trong đó a, b là các số dương và $c = \sqrt{a^2+b^2}$.



Hình 1: Đường xoắn ốc

Với đường xoắn ốc ta có :

$$\mathbf{T} = (-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}),$$
$$\mathbf{N} = (-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0),$$
$$\mathbf{B} = (\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}).$$

Từ đó, ta có

$$\mathbf{T}' = (-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0),$$
$$\mathbf{N}' = (\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0),$$
$$\mathbf{B}' = (\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0).$$

Đường xoắn ốc có độ cong $\kappa = \frac{a}{c^2}$ và độ xoắn $\tau = \frac{b}{c^2}$. Có thể dễ dàng kiểm tra tính đúng đắn của hệ thức Frenet trong trường hợp này.

Công thức Frenet được Camille Jordan mở rộng cho đường cong trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$.

VŨ THẾ KHÔI

Tài liệu tham khảo

1. M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised and updated second edition, Courier Dover Publications, Mineola, NY, 2016.
2. W. Kühnel, *Differential Geometry*, Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society, Providence, RI 2, 2002.
3. M. A. Spivak, *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume 2, Publish or Perish Inc., Houston, Texas, 1999.