CƠ SỞ TÔ PÔ (base of topology)

Cho (X, τ) là một không gian tô pô, *cơ sở tô pô*, hay còn được gọi tắt là cơ sở, của tô pô τ là một họ $\mathcal{B}$ gồm một số tập con mở của X mà mọi tập mở của X đều là hợp của một số tập thuộc $\mathcal{B}$.

Chú ý rằng cơ sở của một tô pô không phải duy nhất. Những cơ sở được quan tâm thường là họ gồm một số tập mở đặc biệt, dễ mô tả mà từ đó vẫn có thể xác định hoàn toàn tô pô của không gian. Một ví dụ đơn giản là tập hợp tất cả các khoảng mở có dạng (a, b) trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$ là cơ sở của tô pô tự nhiên trên đó vì một khoảng mở là tập hợp mở và một tập hợp con mở bất kỳ của $\mathbb{R}$ đều bằng hợp của một họ các khoảng mở. Một ví dụ khác là tô pô rời rạc trên một tập X. Ta có thể chọn cơ sở là họ gồm tất cả các tập chứa một phần tử. Hiển nhiên đây là cơ sở vì mọi tập con A đều có thể viết dưới dạng $A = \cup_{x \in A}\{x\}$.

Cho X là một tập hợp (chưa có cấu trúc tô pô) và $\mathcal{B}$ là một họ các tập con của X. Một câu hỏi là: liệu có tồn tại một tô pô τ trên X mà nhận $\mathcal{B}$ là một cơ sở? Để câu trả lời là có, $\mathcal{B}$ cần thỏa mãn một số tính chất nhất định. Từ đó dẫn đến định nghĩa sau.

Một họ $\mathcal{B}$ các tập con của một tập hợp X được gọi là một *cơ sở* trên X nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Họ $\mathcal{B}$ phủ X, tức là $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$,
- Với hai tập B_1, B_2 bất kỳ của họ $\mathcal{B}$ và một phần tử x tùy ý trong $B_1 \cap B_2$, luôn tồn tại $B \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Không khó để chứng minh rằng nếu $\mathcal{B}$ là cơ sở của một tô pô τ trên X thì nó thỏa mãn hai điều kiện trong định nghĩa trên. Theo chiều ngược lại, người ta chứng minh được rằng nếu $\mathcal{B}$ là một cơ sở trên tập X, thì họ $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ gồm tập rỗng và tất cả những tập có dạng hợp của một số tập của $\mathcal{B}$ xác định một tô pô trên tập X và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của tô pô này. Tô pô $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ trên X được gọi là *tô pô sinh bởi $\mathcal{B}$*.

Ví dụ.

- Như đã nói ở trên, họ $\Gamma = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$ thỏa mãn hai điều kiện trong định nghĩa và do đó xác định một cơ sở trên $\mathbb{R}$. Họ này sinh ra tô pô tự nhiên trên $\mathbb{R}$. Họ con $\Gamma' = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ cũng là một cơ sở trên $\mathbb{R}$ và cũng sinh ra tô pô tự nhiên trên $\mathbb{R}$.

- Họ gồm các tập chỉ có một điểm $\mathcal{P} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ là một cơ sở trên $\mathbb{R}$ và sinh ra tô pô rời rạc trên đó. Một cơ sở khác trên $\mathbb{R}$ là họ $\Sigma = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$ cũng sinh ra tô pô rời rạc trên $\mathbb{R}$.
- Họ $\mathcal{B} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$ là một cơ sở trên $\mathbb{R}$ và tô pô $\mathcal{S}$ mà nó sinh ra được gọi là *tô pô giới hạn dưới*. tô pô giới hạn dưới mịn hơn tô pô tự nhiên trên $\mathbb{R}$ vì mọi khoảng mở đều là hợp của một họ các khoảng nửa mở: $(a, b) = \bigcup_{n=N}^{\infty}[a - \frac{1}{n}, b)$, với N đủ lớn. Không gian $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ được gọi là *đường thẳng Sorgenfrey*.
- Họ $\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2 \mid a < b, c < d\}$ là một cơ sở trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và nó sinh ra tô pô tự nhiên trên $\mathbb{R}^2$.
- Xét tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$. Đặt $U_a(b) = \{b + na \in \mathbb{Z}^+ \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Khi đó họ

$$\mathcal{B} = \{U_a(b) \mid a, b \in \mathbf{Z}^+, \gcd(a, b) = 1\}$$

  là một cơ sở trên $\mathbb{Z}^+$ và tô pô sinh bởi nó được gọi là *tô pô số nguyên tố cùng nhau*.
- Cố định một số nguyên tố p. Đặt $U_a(n) = \{n + \lambda p^a : \lambda \in \mathbb{Z}\}$ trong đó a, n là các số nguyên và a không âm. Khi đó họ $\mathcal{B} = \{U_a(n) \mid a, n \in \mathbb{Z}, a \geq 0\}$ là một cơ sở trên $\mathbb{Z}$ và tô pô sinh bởi họ này được gọi là *tô pô p-adic* trên $\mathbb{Z}$.

VŨ THẾ KHÔI

Tài liệu tham khảo

1. J. L. Kelley, *General Topology*, Dover, New York, 2017.
2. L. A. Steen, J. A. Seebach, and Lynn A. Steen, *Counterexamples in Topology*, Vol. 18, Springer, New York, 1978.
3. S. Willard, *General Topology*, Dover, New York, 2004.