ĐA GIÁC (polygon)

một đường gấp khúc khép kín bao gồm những đoạn thẳng nối tiếp nhau nằm trong mặt phẳng. Những đoạn thẳng trên đường gấp khúc này được gọi là các cạnh của đa giác, còn điểm nối tiếp giữa hai cạnh được gọi là đỉnh của đa giác. Hai cạnh có chung đỉnh cũng được gọi là hai cạnh kề nhau. Đoạn thẳng nối hai đỉnh không liền kề nhau được gọi là đường chéo của đa giác.

Đa giác được biết đến từ thời cổ đại. Người Hy lạp cổ đại đã biết đến những đa giác đều. Hình sao năm cánh, xuất hiện vào khoảng thế kỷ VII TCN trên bình gồm sứ vẽ bởi Aristophanes, hiện đang trưng bày ở bảo tàng Capitoline.

Đa giác có thể phân loại qua số cạnh của nó (như tam giác, tứ giác); hoặc qua tính chất lồi hoặc lõm; hoặc qua tính chất bằng nhau, đối xứng.

Đa giác lồi (convex polygon): toàn bộ đa giác nằm về một phía của đường thẳng chứa cạnh bất kỳ của đa giác.

Đa giác lõm (concave polygon): đa giác nằm về hai phía của ít nhất một đường thẳng chứa cạnh nào đó.

Đa giác đơn (simple polygon): đa giác mà các cạnh chỉ có thể cắt nhau tại các đầu mút (đỉnh đa giác), tức là hai cạnh không kề nhau sẽ không cắt nhau. Tổng các góc trong của một đa giác đơn n cạnh là $(n-2)\pi$ radian.

Nếu đa giác là đa giác đơn thì các cạnh và các đỉnh tạo thành ranh giới của miền đa giác, đôi khi thuật ngữ đa giác nói đến phần trong của đa giác (diện tích mở ở giữa hình này) hay cả miền trong và ranh giới.

Đa giác đều (regular polygon): đa giác mà tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau.

Đa giác nội tiếp đường tròn: đa giác mà tất cả các đỉnh của nó nằm trên một đường tròn.

Đa giác ngoại tiếp đường tròn: đa giác lồi mà tất cả các cạnh của nó tiếp xúc với một đường tròn nằm bên trong.

Xét đa giác đơn n cạnh với các đỉnh có tọa độ lần lượt là (x_0, y_0),

(x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}). Khi đó, diện tích của đa giác bằng

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\right|, \qquad \text{với } x_n = x_0 \text{ và } y_n = y_0.$$

Công thức tính diện tích này đôi khi được gọi là công thức dây giày (shoelace formula) hay công thức của người đo đạc (surveyor's formula). Nó được tìm ra bởi Albrecht Ludwig Friedrich Meister (1724-1788) vào năm 1769, dựa vào công thức diện tích hình thang.

Xét đa giác đơn trong mặt phẳng với các đỉnh là các điểm nguyên (điểm có hai tọa độ đều là số nguyên). Gọi i là số điểm nguyên nằm trong tam giác, và gọi b là số điểm nguyên nằm trên biên của đa giác (kể cả các đỉnh đa giác). Khi đó, diện tích A đa giác này bằng

$$A = i + \frac{b}{2} - 1.$$

Kết quả này được gọi là định lý Pick (Pick's theorem), do Georg Alexander Pick tìm ra vào năm 1899.

Với mọi đa giác đơn với chu vi p và diện tích A, ta đều có bất đẳng thức $p^2 > 4\pi A$. Xem [2] cho một chứng minh sơ cấp của kết quả này. Tổng quát hơn, người ta chứng minh được rằng với mọi đường đơn đóng chu vi p, giới hạn diện tích A, ta có bất đẳng thức $p^2 \geq 4A$, và dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi đường này là đường tròn.

Nói chung, độ dài các cạnh của đa giác không xác định được diện tích đa giác. Tuy nhiên nếu một đa giác là đa giác đơn nội tiếp đường tròn thì độ dài cách cạnh của đa giác này sẽ hoàn toàn xác định diện tích của nó. Trường hợp đa giác này là tam giác (luôn nội tiếp), công thức Heron cho ta mối liên hệ của diện tích của nó qua độ dài các cạnh. Trường hợp đa giác này là tứ giác nội tiếp, công thức Brahmagupta cho ta mối liên hệ của diện tích của nó qua độ dài các cạnh.

Với hai đa giác đơn có cùng diện tích, định lý Wallace-Bolyai-Gerwien [3] khẳng định rằng ta có thể cắt đa giác thứ nhất thành các đa giác con sao cho sau khi lắp ghép lại ta được đa giác thứ hai. Wallace chứng minh kết quả này vào năm 1807. Bolyai và Gerwien một cách độc lập chứng minh kết quả này vào năm 1833 và năm 1835. Khẳng định tương tự cho đa diện trong không gian ba chiều được biết đến như bài toán thứ ba của Hilbert. Năm 1900, Max Dehn chỉ ra khẳng định tương tự này không còn đúng.

NGUYỄN DUY TÂN

Tài liệu tham khảo

1. B. Braden, *The Surveyor's Area Formula*, The College Mathematics Journal. 17 (4), 1986, 326–337.
2. N. Dergiades, *An elementary proof of the isoperimetric inequality*, Forum Mathematicorum 2, 2002, 129–130.
3. V. Klee and S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1991, 50–51.
4. A. L. F. Meister, *Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*, Nov. Com. Gött. (in Latin), 1: 144, 1769.
5. G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlichmedicinischen Vereines für Böhmen "Lotos" in Prag. (Neue Folge). 19, 1899, 311–319.