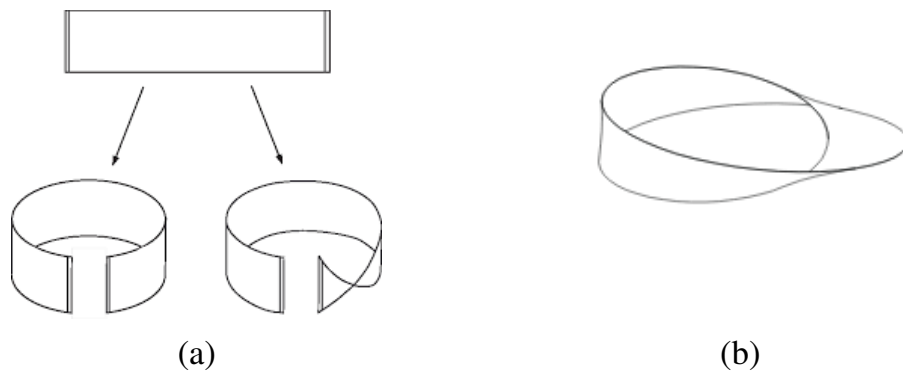


DẢI MÖBIUS (Möbius band)

là mặt hai chiều mà khi nhúng vào không gian Euclid ba chiều nó chỉ có một phía. Dải Möbius là ví dụ đơn giản nhất về mặt *không định hướng được*, tức là không thể xác định véc tơ pháp tuyến một cách liên tục trên toàn bộ bề mặt của dải.

Dải Möbius được khám phá ra một cách độc lập bởi các nhà toán học Đức Johann Benedict Listing và August Ferdinand Möbius vào năm 1858, mặc dù các cấu trúc tương tự có thể được nhìn thấy trong tranh ghép La Mã từ những năm 200–250.

Nếu ta lấy một băng giấy hình chữ nhật và dán hai đầu lại với nhau theo cách thông thường, ta nhận được một hình trụ. Để tạo ra mô hình của dải Möbius, trước khi dán hai đầu với nhau, ta cho một đầu xoắn nửa vòng như trong Hình 1(a) dưới đây. Kết quả nhận được là dải Möbius với các tính chất tô pô độc đáo khác hoàn toàn với hình trụ (xem Hình 1(b)). Trên hình vẽ, ta thấy biên của dải Möbius là một đường cong đơn khép kín, trong khi đó biên của hình trụ gồm hai vòng tròn rời nhau.

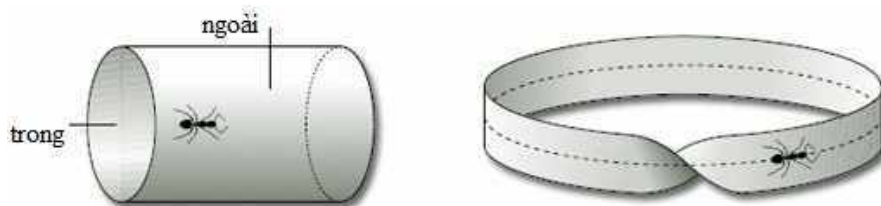


Hình 1: Mô hình dải Möbius

Bất kỳ không gian tô pô nào đồng phôi với một hình như trên cũng được gọi là dải Möbius.

Với một mặt định hướng được, chẳng hạn như mặt trụ trong hình bên dưới, ta có thể xác định một mặt trong và một mặt ngoài. Khi một con kiến bò trên mặt ngoài thì nó không thể sang mặt trong trừ khi leo qua biên.

Nhưng với dải Möbius, tính không định hướng được thể hiện ở việc nếu con kiến bò quanh dải Möbius nó sẽ đi qua cả hai phía của dải mà không cần leo qua biên.



Hình 2: Tính không định hướng được của dải Möbius

HÌNH HỌC VÀ TÔ PÔ CỦA DẢI MÖBIUS

Ta có thể biểu diễn phương trình tham số thể hiện phép nhúng dải Möbius vào trong không gian \mathbb{R}^3 như sau

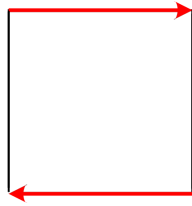
$$\begin{aligned} x(u, v) &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y(u, v) &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z(u, v) &= \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}, \end{aligned}$$

Với $0 \leq u < 2\pi$ và $-1 \leq v \leq 1$.

Dải Möbius có phương trình tham số như trên có chiều rộng 1, vòng tròn ở chính giữa dải có tâm tại điểm $(0, 0, 0)$ bán kính 1 và nằm trong mặt phẳng xy . Tham số u chạy quanh dải trong khi v di chuyển từ cạnh này sang cạnh kia.

Về mặt tô pô, dải Möbius có thể được định nghĩa là hình vuông $[0, 1] \times [0, 1]$ với các cạnh trên và dưới của nó được đồng nhất với nhau theo quan hệ tương đương $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ với $0 \leq x \leq 1$. Nói một cách đơn giản là ta "dán" cạnh trên và cạnh dưới của hình vuông sao cho chiều mũi tên trên các cạnh trùng nhau như trong Hình 3 bên dưới.

Dải Möbius là một đa tạp compact hai chiều có biên. Nó là một ví dụ điển hình về một mặt không định hướng được. Dải Möbius là nhân tố cốt lõi của hiện tượng không định hướng được. Thực vậy, dải Möbius là không gian con chứa trong mọi mặt hai chiều không định hướng được, chú ý rằng



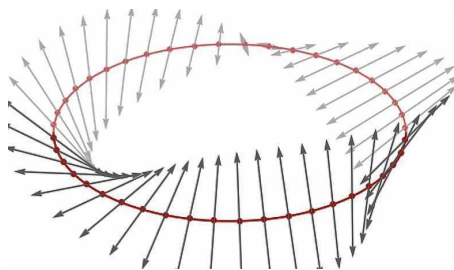
Hình 3: Dải Möbius nhận được bằng cách dán hai cạnh của hình vuông

chiều hai là số chiều nhỏ nhất có thể xuất hiện hiện tượng không định hướng được.

Dải Möbius cũng là một ví dụ được sử dụng để minh họa cho khái niệm toán học về không gian phân thớ. Không gian phân thớ là không gian mà trong một lân cận địa phương nó có dạng không gian tích nhưng trên toàn cục có thể không đồng phôi với không gian tích.

Cụ thể, dải Möbius là một phân thớ không tầm thường trên vòng tròn S^1 với thớ là khoảng đơn vị, $I = [0, 1]$. Nếu xét tại địa phương, dải Möbius có dạng $U \times I$, với U là một tập mở trong S^1 . Tuy nhiên, xét toàn cục nó không đồng phôi với không gian tích $S^1 \times I$. Nếu chỉ xét biên của lá Möbius, nó là một phân thớ không tầm thường trên S^1 với thớ là hai điểm đầu mút của I .

Ở hình vẽ bên dưới, ta có thể cảm nhận được phân thớ là không tầm thường vì khi đoạn I di chuyển một vòng quanh đường tròn S^1 , nó không trùng khớp với vị trí xuất phát mà bị quay đi 180° .



Hình 4: Dải Möbius như một phân thớ trên đường tròn

DẢI MÖBIUS TRONG KHOA HỌC KỸ THUẬT VÀ NGHỆ THUẬT

Đã có một số ứng dụng kỹ thuật của dải Möbius. Các dải Möbius khổng

lồ đã được sử dụng làm băng tải có tuổi thọ cao hơn vì toàn bộ diện tích bề mặt của băng tải bị mài mòn đều nhau. Dải Möbius được dùng làm băng vòng ghi nhạc để tăng gấp đôi thời gian chơi. Nó cũng được dùng trong sản xuất ruy băng vải cho máy in và máy đánh chữ, vì chúng cho phép ruy băng rộng gấp đôi so với đầu in trong khi sử dụng đồng đều cả hai nửa.

Điện trở Möbius là một mạch điện tử có khả năng loại bỏ điện kháng cảm ứng của chính nó. Nikola Tesla đã được cấp bằng sáng chế cho một công nghệ tương tự vào năm 1894: "Cuộn dây cho nam châm điện" đã được dự tính để sử dụng trong hệ thống truyền tải điện toàn cầu không cần dây dẫn của ông.

Ngày nay dải Möbius còn được sử dụng trong nhiều ngành Vật lý điện tử và Công nghệ Na-no.

Trong nghệ thuật, dải Möbius cũng là niềm cảm hứng cho sự ra đời của nhiều tác phẩm kiến trúc, điêu khắc và hội họa nổi tiếng. Danh họa M. C. Escher dường như đã bị thu hút bởi dải Möbius vì mối liên hệ của nó với cái vô hạn và đã cho ra đời một loạt những tác phẩm về chủ đề này.

VŨ THẾ KHÔI

Tài liệu tham khảo

1. S. Barr, *Experiments in Topology*, Dover Publications, New York, 2012.
2. D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, No. 87, American Mathematical Soc., Providence, RI, 1999.
3. C. A. Pickover, *The Möbius Strip: Dr. August Mobius's marvelous band in mathematics, games, literature, art, technology, and cosmology*, Thunder's Mouth Press, New York, 2006.