

ĐẠI SỐ (CHUYÊN NGÀNH) (algebra)

Đại số là một bộ môn lớn của toán học chuyên nghiên cứu các tập hợp được trang bị các phép tính có những tính chất giống như các phép tính cộng trừ nhân chia với các số thông thường. Về mặt ngữ nghĩa, đại số là từ Hán-Việt, có nghĩa là số đại diện, hay chính xác hơn là biến số.

Tên gọi Đại số trong tiếng Latin là Algebra. Tên này có xuất xứ từ tên công trình "Al jabr al-muqabala" của nhà toán học Mohammed Musa al-Khwarizmi (khoảng 780 - 850). Đây có lẽ là công trình đầu tiên trình bày một cách hệ thống các phương pháp giải các vấn đề tính toán có thể quy về các phương trình tuyến tính hay phương trình bậc hai. Nghĩa đen của câu "Al jabr al-muqabala" có nghĩa là hoàn thiện và cân bằng (phương trình). Công trình này được dịch sang tiếng Latin từ thế kỷ XII [2] và được sử dụng như là một cuốn sách giáo khoa về toán học mãi cho đến thế kỷ XVI.

Từ thế kỷ XVII đến giữa thế kỷ XVIII người ta coi Đại số là bộ môn khoa học nghiên cứu các tính toán thông thường (cộng trừ nhân chia) với các biến số là các ký hiệu biểu hiện cho các con số để phân biệt với Số học là bộ môn nghiên cứu việc tính toán với các số tự nhiên. Việc dùng các ký hiệu cho phép chứng minh các công thức toán học đúng cho mọi giá trị số cụ thể. Ví dụ như phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có nghiệm là

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

trong đó các chữ số a, b, c có thể là bất kỳ số nào với $a \neq 0$.

Từ thế kỷ XVIII đến đầu thế kỷ XIX người ta quan tâm đến việc giải các phương trình đa thức dạng

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

với mọi bậc n . Mục tiêu là tìm các công thức tính nghiệm bằng căn thức, tức là các biểu thức chỉ chứa các phép tính cộng trừ nhân chia và khai căn với các hệ số a_0, a_1, \dots, a_n của đa thức giống như trong công thức nghiệm trên.

Đỉnh điểm của những nỗ lực này là công trình của nhà toán học Évariste Galois (1811-1832) đưa ra một tiêu chuẩn tổng quát cho sự tồn tại công thức giải phương trình đa thức bằng căn thức [3]. Tiêu chuẩn này phụ thuộc vào tính chất của các phép hoán vị nghiệm được xác định bởi phép lấy hợp thành. Công trình của Galois cho thấy sự cần thiết phải nghiên cứu các tập hợp mà trên đó người ta có những phép toán đại số là các phép toán gần giống với các phép tính trong số học.

Sau công trình của Galois người ta bắt đầu nghiên cứu những thực thể khác được trang bị các phép toán đại số như số phức, số quaternion, ma trận, v.v. Việc khái quát hóa những thực thể này đã dẫn đến sự hình thành bộ môn *Đại số trừu tượng* hay *Đại số cao cấp* mà đối tượng nghiên cứu chính là các phép toán đại số thỏa mãn một số tính chất nào đó. Tên gọi này là để phân biệt với môn *Đại số sơ cấp* bao gồm những kiến thức cơ bản về các phép tính số học và giải phương trình được dạy trong trường phổ thông.

Tổng quát hơn, một *phép toán đại số* trên một tập V là một ánh xạ từ tập tích $V \times V$ vào V . Khi đó tập V được gọi là một *cấu trúc đại số*. Cho x, y hai phần tử của đại số V . Người ta thường ký hiệu ảnh của $(x, y) \in V \times V$ với $x * y$ và coi $x * y$ như là kết quả của việc thực hiện phép toán $*$ với x, y . Ví dụ như, các ánh xạ $(x, y) \rightarrow x + y$ hay $(x, y) \rightarrow xy$ chính là phép cộng và phép nhân trong tập các số thực. Ta cũng có thể xét ánh xạ $(x, y) \rightarrow x$ là phép chiếu xuống toạ độ thứ nhất và coi đó như một phép toán với các số thực.

Để có thể tính toán được trong một cấu trúc đại số V , người ta thường yêu cầu phép toán của V thỏa mãn một số quy luật tính toán nào đó, ví dụ như *luật giao hoán*

$$x * y = y * x,$$

hay *luật kết hợp*

$$(x * y) * z = x * (y * z),$$

với mọi phần tử $x, y, z \in V$. Ví dụ, như phép cộng và phép nhân trong tập các số thực thỏa mãn các quy luật trên, trong lúc phép chiếu chỉ thỏa mãn luật kết hợp nhưng không thỏa mãn luật giao hoán.

Ngoài ra, người ta còn thường đòi hỏi cấu trúc đại số V có một số phần tử với những tính chất đặc biệt như *phần tử đơn vị* là phần tử e thỏa mãn

điều kiện

$$x * e = e * x = x,$$

với mọi $x \in V$, hay *phần tử nghịch đảo* của phần tử x là một phần tử y thỏa mãn tính chất

$$x * y = y * x = e.$$

Ví dụ như đối với phép cộng các số thực thì phần tử 0 là phần tử đơn vị và $-x$ là phần tử nghịch đảo của x . Đối với phép nhân các số thực khác 0 thì phần tử 1 là phần tử đơn vị và $1/x$ là phần tử nghịch đảo của x . Tuy nhiên nếu ta giới hạn phép nhân trong tập các số nguyên thì chỉ có số 1 có phần tử nghịch đảo.

Một cấu trúc đại số có thể có nhiều phép toán khác nhau. Các phép toán này cũng thường được yêu cầu thỏa mãn một số quy luật phản ánh mối tương tác giữa chúng. Ví dụ như nếu V có thêm phép toán $+$, thì *luật phân phối* của $+$ theo $*$ đòi hỏi

$$(x + y) * z = (x * z) + (y * z),$$

với mọi phần tử $x, y, z \in V$. Ví dụ như phép cộng thỏa mãn luật phân phối với phép nhân nhưng phép nhân không thỏa mãn luật phân phối với phép cộng trong tập các số thực.

Hai cấu trúc đại số V với phép toán $*$ và W với phép toán \bullet được coi là giống nhau về mặt cấu trúc nếu tồn tại một song ánh ϕ từ V vào W tương thích với các phép toán, có nghĩa là

$$\phi(x * y) = \phi(x) \bullet \phi(y),$$

với mọi $x, y \in V$. Khi đó, người ta nói V *đẳng cấu* với W . Trong trường hợp này, các quy luật tính toán trong V cũng sẽ đúng trong W .

Các quy luật tính toán của một cấu trúc đại số còn được gọi là *hệ tiên đề* của cấu trúc đó. Các hệ tiên đề có khuôn mẫu từ những đối tượng nghiên cứu cụ thể trong toán học. Tùy theo hệ tiên đề mà các cấu trúc đại số còn được đặt tên gọi khác để phân biệt các loại cấu trúc đại số khác nhau.

- Cấu trúc đại số được nghiên cứu kỹ nhất là nhóm. Đây là các cấu trúc đại số với một phép toán thỏa mãn luật kết hợp có phần tử đơn vị

và phần tử nghịch đảo của mọi phần tử. Về mặt lịch sử, đây là ví dụ không tầm thường đầu tiên về cấu trúc đại số. Khuôn mẫu của nhóm chính là tập các hoán vị nghiệm trong công trình của Galois.

- Vành là một nhóm giao hoán có trang bị thêm phép nhân giống như tập các số nguyên, trong đó phép cộng thỏa mãn luật phân phối theo phép nhân và phép nhân không nhất thiết phải giao hoán.
- Trường là vành mà trong đó phép nhân có phần tử đơn vị và mọi phần tử có phần tử nghịch đảo. Khuôn mẫu của trường chính là tập các số hữu tỷ hay tập các số thực.
- Không gian tuyến tính hay không gian véc tơ trên một trường là một nhóm giao hoán với phép toán cộng và các phép toán nhân vô hướng với các phần tử của trường. Khái niệm này có khuôn mẫu là không gian ba chiều với các phép tính véc tơ.

Chuyên ngành Đại số được chia thành các chuyên ngành hẹp chuyên nghiên cứu các cấu trúc đại số thỏa mãn cùng một hệ tiên đề. Ví dụ như các cấu trúc đại số được trình bày ở trên là đối tượng nghiên cứu của Lý thuyết nhóm, Lý thuyết vành, Lý thuyết trường và Đại số tuyến tính. Các chuyên ngành hẹp của Đại số còn được chia nhỏ ra như Lý thuyết vành bao gồm hai chuyên ngành hẹp chính là Vành kết hợp (phép nhân thỏa mãn luật kết hợp) và Vành giao hoán (phép nhân thỏa mãn luật giao hoán).

Do Đại số nghiên cứu các quy luật tính toán và nghiệm của phương trình nên Đại số đóng vai trò rất quan trọng Số học và Hình học. Bên cạnh đó, các cấu trúc đại số còn xuất hiện trong nhiều ngành toán học khác. Khi đó, chúng thường có các phép toán tương thích với các khái niệm của ngành khác như đại số Boole trong Lô gic, nhóm tô pô trong Tô pô, vành có chuẩn và đại số vi phân trong Giải tích.

Toán học ngày nay có xu hướng đại số hóa, có nghĩa là xây dựng những cấu trúc đại số có thể phản ánh được các tính chất của đối tượng nghiên cứu ban đầu. Phương pháp này nhiều khi rất hiệu quả bởi vì nó có thể áp dụng những công cụ rất mạnh của đại số về suy luận hình thức để đi sâu vào cốt lõi của vấn đề.

Cuốn sách đầu tiên tổng hợp các khái niệm và phương pháp của Đại số trừu tượng là cuốn “Đại số hiện đại” của Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996). Cho đến nay, cuốn sách này vẫn được coi là một cuốn sách giáo khoa mẫu mực về Đại số trừu tượng. Hiện nay, tên gọi của nó được đổi thành "Đại số" vì các kiến thức được trình bày trong đó không còn hiện đại nữa [4]. Để tìm hiểu bước đầu về các kiến thức đại số trừu tượng có thể đọc cuốn "Đại số" của Michael Artin [1].

NGÔ VIỆT TRUNG

Tài liệu tham khảo

1. M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, NJ, 2011.
2. R. Chester, *Algebra of al-Khowarizmi*, Macmillan, 1915.
3. É. Galois, *Note sur la résolution des équations numériques*, Bulletin des Sciences mathématiques, XIII: 413 (1830).
4. B. L. van der Waerden, *Algebra*, Vol. I and II, Frederick Ungar, New York, 1970.