DÀN (lattice)

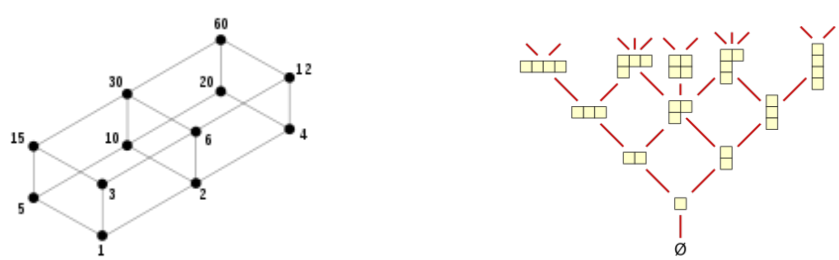
là một cấu trúc trừu tượng, có ý nghĩa trong lý thuyết tập có thứ tự và lý thuyết đại số phổ dụng. Dàn là một trường hợp đặc biệt của tập có thứ tự bộ phận với điều kiện tồn tại cận trên nhỏ nhất và cận dưới lớn nhất của mỗi cặp các phần tử. Các dàn đặc biệt như dàn phân phối, dàn môđun là các cấu trúc quan trọng trong đại số.

DÀN TRONG LÝ THUYẾT TẬP CÓ THỨ TỰ

Cho $(P, \leq)$ là một tập có thứ tự bộ phận. Một phần tử x là *cận trên* (tương ứng, *cận dưới*) của một tập con A của P nếu $x \geq a$ (tương ứng, $x \leq a$) với mọi phần tử $a \in A$.

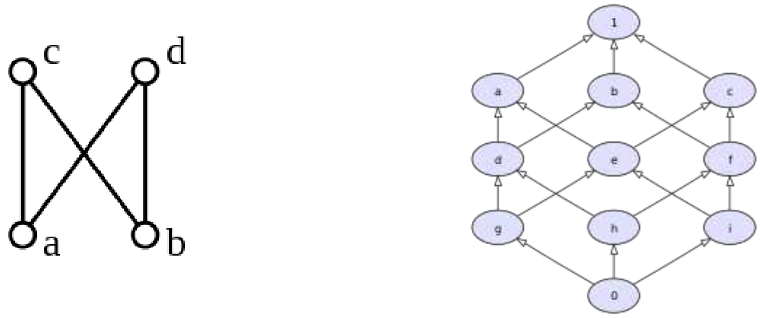
Cận trên nhỏ nhất của một tập con A của P, ký hiệu $\sup(A)$, là phần tử nhỏ nhất trong tập các cận trên của A, *cận dưới lớn nhất* của một tập con A của P, ký hiệu $\inf(A)$, là phần tử lớn nhất trong tập các cận dưới của A; $\sup(A)$ và $\inf(A)$ có thể không tồn tại. Các phần tử $\sup(A)$ và $\inf(A)$ còn được ký hiệu là và $\bigvee A$, $\bigwedge A$ tương ứng. Đặc biệt, nếu chỉ có hai phần tử a và b, thì cận trên nhỏ nhất của chúng, ký hiệu $\sup(a, b)$ hay $a \vee b$, còn được gọi là hội của a và b; và cận dưới lớn nhất của chúng, ký hiệu $\inf(a, b)$ hay $a \wedge b$, còn được gọi là tuyển của a và b.

Một *dàn* $(L, \leq)$ là một một tập có thứ tự bộ phận sao cho với mỗi cặp (a, b), hội $a \vee b$ và tuyển $a \wedge b$ luôn tồn tại. Nếu L chỉ thỏa mãn điều kiện tồn tại hội (tương ứng, tuyển) thì nó được gọi là *nửa dàn hội* (tương ứng, *nửa dàn tuyển*). Nếu hơn thế nữa, nếu luôn tồn tại $\bigvee A$ và $\bigwedge A$ với mọi tập con A của L, thì L được gọi là *dàn đầy đủ*.



Hình 1: Dàn các ước số của 60 (trái) và Dàn Young (phải).

Một dàn có một phần tử lớn nhất và một phần tử nhỏ nhất được gọi là



Hình 2: Một số tập có thứ tự không phải là dàn.

một *dàn bị chặn*. Mọi dàn đều có thể nhúng vào một dàn bị chặn bằng cách thêm vào một phần tử lớn nhất và một phần tử nhỏ nhất.

Có nhiều ví dụ về dàn, và có nhiều tập có thứ tự không phải là dàn. Ví dụ điển hình nhất là tập $\wp(S)$ các tập con của một tập hợp S với quan hệ bao hàm. Đây là một dàn bị chặn với phần tử lớn nhất là tập S và nhỏ nhất là tập rỗng $\emptyset$. Tập các số tự nhiên với quan hệ chia hết cũng là một dàn trong đó hội của hai số tự nhiên là bội chung nhỏ nhất và tuyển của hai số tự nhiên là ước chung lớn nhất của chúng. Tuy nhiên nếu chỉ xét một tập S gồm một số số tự nhiên với quan hệ chia hết thì nó có thể không phải là dàn vì bội chung nhỏ nhất hay ước chung lớn nhất của hai số trong S chưa chắc đã là một phần tử của S. Một tập có thứ tự toàn phần là một ví dụ đơn giản về dàn.

DÀN TRONG ĐẠI SỐ

Một cấu trúc đại số $(L, \vee, \wedge)$ gồm một tập hợp với hai toán tử giao hoán và kết hợp $\vee$, $\wedge$ được gọi là một dàn nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

- *Luật hấp thụ*: $a \vee (a \wedge b) = a$ và $a \vee (a \wedge b) = a$;
- *Luật lũy đẳng*: $a \vee a = a$ và $a \wedge a = a$.

Dàn $(L, \vee, \wedge)$ được gọi là bị chặn nếu nó có hai phần tử 0 và 1 sao cho

- Phần tử 0 là phần tử đơn vị của phép $\vee$: với mọi a ta có $a \vee 0 = a$;
- Phần tử 1 là phần tử đơn vị của phép $\wedge$: với mọi a ta có $a \wedge 1 = a$.

Định nghĩa này có liên hệ mật thiết với định nghĩa dàn theo tập có thứ tự. Trước hết nếu $(L, \leq)$ là một tập có thứ tự và là một dàn thì nó có hai toán tử $\vee$ và $\wedge$, dễ dàng kiểm tra hai toán tử này thỏa mãn các điều kiện về luật giao hoán, kết hợp, hấp thụ và lũy đẳng. Mặt khác, nếu $(L, \vee, \wedge)$ là một dàn với hai toán tử thỏa mãn các luật đại số đã nêu thì ta có thể định nghĩa thứ tự trên L như sau: $a \leq b$ nếu $a = a \wedge b$ hoặc $a \leq b$ nếu $b = a \vee b$ với mọi $a, b \in L$.

Dàn con của một dàn $(L, \vee, \wedge)$ là một tập con của L và cũng là một dàn với hai phép toán như của L. Theo ngôn ngữ tập thứ tự, thì tập con $A \subset L$ là dàn con của L nếu với mọi cặp phần tử (a, b) của A thì $a \vee b$ và $a \wedge b$ cũng là phần tử của A.

Một đồng cấu giữa hai dàn là một ánh xạ giữa hai tập hợp nền của hai dàn và bảo toàn hai phép toán $\vee$ và $\wedge$. Hơn nữa, nếu đồng cấu đó là một song ánh thì nó được gọi là đẳng cấu.

CÁC TÍNH CHẤT CỦA DÀN

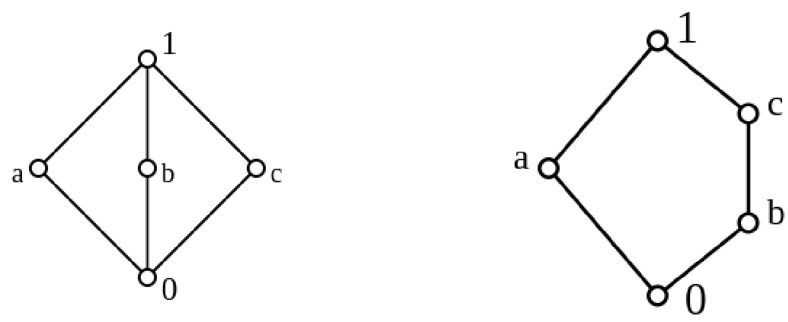
Dàn $(L, \vee, \wedge)$ được gọi là phân phối nếu hai phép toán của nó phân phối với nhau, nghĩa là một trong hai điều kiện (tương đương nhau) sau đây thỏa mãn:

- Phân phối của hội với tuyển: với mọi $a, b, c \in L$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
- Phân phối của tuyển với hội: với mọi $a, b, c \in L$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Dàn phân phối là một cấu trúc rất quan trọng trong đại số. Các ví dụ điển hình của dàn phân phối là tập số tự nhiên với thứ tự chia hết, hai phép toán hội và tuyển tương ứng sẽ là phép lấy bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất; tập các tập con của một tập hợp với quan hệ thứ tự bao hàm, và hai phép toán tương ứng là phép hợp và phép giao tập hợp; tập các điểm trên một lưới nguyên - với thứ tự được định nghĩa một điểm là nhỏ hơn một điểm khác nếu mỗi tọa độ của nó là nhỏ hơn tọa độ tương ứng của điểm kia - cũng là một dàn phân phối, v.v.

Hai ví dụ điển hình về dàn không phân phối là hai dàn M_3 và N_5 (xem hình vẽ). Hơn thế nữa một dàn là phân phối khi và chỉ khi nó không chứa dàn con nào đẳng cấu với M_3 hoặc N_5.

Tính phân phối là một tính chất rất mạnh và do vậy dàn phân phối có cấu trúc chặt chẽ. Một cấu trúc yếu hơn là dàn môđun.



Hình 3: Dàn M_3 và N_5.

Dàn $(L, \vee, \wedge)$ được gọi là môđun nếu một trong hai điều kiện (tương đương nhau) sau đây thỏa mãn:

- Đẳng thức môđun: với mọi $a, b, c \in L$, $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c$;
- Luật môđun: với mọi $a, b, c \in L$, $a \leq c$ kéo theo $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Một dàn là môđun khi và chỉ khi nó không chứa dàn con đẳng cấu với N_5. Các ví dụ điển hình của dàn môđun là dàn các idean hai phía của một vành, dàn các môđun con của một môđun, dàn các nhóm con chuẩn tắc của một nhóm.

PHAN THỊ HÀ DƯƠNG

Tài liệu tham khảo

1. B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
2. Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 2021.