DÀN ĐẦY ĐỦ (complete lattice)

là một cấu trúc dàn đặc biệt, theo định nghĩa dàn là một tập có thứ tự bộ phận với điều kiện tồn tại cận trên nhỏ nhất và cận dưới lớn nhất của mỗi cặp các phần tử; còn dàn đầy đủ là một tập có thứ tự bộ phận với điều kiện tồn tại cận trên nhỏ nhất và cận dưới lớn nhất cho mọi tập con A bất kỳ. Các cận này được gọi là *hội* của A và *tuyển* của A, và được ký hiệu lần lượt là $\sup(A)$ và $\inf(A)$, hoặc $\bigvee A$ và $\bigwedge A$.

Nếu một dàn S có phần tử lớn nhất, và với mọi tập con khác rỗng A đều có tuyển thì S là dàn đầy đủ.

Một dàn mà không có chuỗi (xích) có vô hạn phần tử thì là dàn đầy đủ (chuỗi là một tập con mà tất cả các cặp phần tử đều so sánh được với nhau).

Ví dụ như một dàn hữu hạn là một dàn đầy đủ.

Tập các số tự nhiên với thứ tự thông thường sẽ là dàn không đầy đủ vì một tập con vô hạn của nó sẽ không có hội. Tập $S = (0, 1)$ các số thực lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 là dàn không đầy đủ vì nếu lấy tập $A = \{\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ thì A không có tuyển trong S. Tập T các số hữu tỷ nhỏ hơn $\sqrt{2}$ là dàn không đầy đủ vì T không có hội. Nếu thêm 0 và 1 vào S thì đó sẽ là dàn đầy đủ, tuy nhiên sẽ phức tạp hơn trong trường hợp của T.

Có một số cách để bổ sung một dàn cho trước thành một dàn đầy đủ (gọi là phép đầy đủ hóa), trong đó phép đầy đủ hóa Dedekind–MacNeille sẽ cho một dàn đầy đủ ít phần tử nhất có thể.

PHAN THỊ HÀ DƯƠNG

Tài liệu tham khảo

1. B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
2. R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 2021.
3. Spinger Encyclopedia of Mathematics, European Mathematical Society, https://www.encyclopediaofmath.org/index.phpn
4. MathWorld http://mathworld.wolfram.com
5. Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/