DẠNG ĐA TUYẾN TÍNH (multilinear form)

Cho E là không gian véc tơ trên trường K.

Định nghĩa. Ta gọi ánh xạ $f\colon E^n \to K$ là *dạng n-tuyến tính* trên E nếu f thỏa mãn những điều kiện sau với mọi $i = 1, \ldots, n$, với mọi $c \in K$:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &\quad + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \\ f(x_1, \ldots, x_{i-1}, cx_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= cf(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Những điều kiện trên có nghĩa f là dạng tuyến tính trên thành phần thứ i của tích đề các E^n.

Ví dụ. Dạng 2-tuyến tính trên E chính là dạng song tuyến tính trên E^2.

Nếu E là một không gian véc tơ hữu hạn chiều thì mọi dạng n-tuyến tính f trên E đều có thể mô tả được bằng một hệ hữu hạn các giá trị của f.

Cho $m = \dim E$ và $S = \{z_1, \ldots, z_m\}$ là một cơ sở của E. Ánh xạ $f\colon E^n \to K$ là dạng n-tuyến tính khi và chỉ khi f có dạng

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi(1)=1}^{m} \cdots \sum_{\pi(n)=1}^{m} c_{\pi(1),\ldots,\pi(n)} a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n},$$

với mọi tổ hợp tuyến tính $x_j = a_{1j} z_1 + \cdots + a_{mj} z_m$, $j = 1, \ldots, n$, trong đó $c_{\pi(1),\ldots,\pi(n)}$ là một phần tử tuỳ ý trong K. Khi đó, ta có

$$f(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = c_{\pi(1),\ldots,\pi(n)},$$

với mọi chỉ số $\pi(1), \ldots, \pi(n) \in \{1, \ldots, m\}$.

Ví dụ. Ánh xạ $f\colon K^n \to K$ là dạng n-tuyến tính khi và chỉ khi f có dạng

$$f(a_1, \ldots, a_n) = ca_1 \cdots a_n,$$

trong đó c là một phần tử tuỳ ý của K.

Dạng n-tuyến tính f trên E được gọi là *thay phiên* nếu

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

khi ta tráo cặp phần tử $i \neq j$ với mọi $i, j = 1, \dots, n$.

Ví dụ. Dạng 2-tuyến tính thay phiên chính là dạng song tuyến tính thay phiên.

Nếu E là không gian véc tơ n-chiều, ta có thể mô tả tường minh mọi dạng n-tuyến tính thay phiên qua một giá trị duy nhất.

Cho $S = \{z_1, \dots, z_n\}$ là một cơ sở của E. Ánh xạ $f\colon E^n \to K$ là một dạng n-tuyến tính thay phiên khi và chỉ f có dạng

$$f(x_1, \dots, x_n) = c \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n},$$

với mọi tổ hợp tuyến tính $x_j = a_{1j}z_1 + \cdots + a_{nj}z_n$, $j = 1, \dots, n$, trong đó c là một phần tử tuỳ ý trong K, S_n là tập các hoán vị của dãy số $1, \dots, n$ và $\operatorname{sign}(\pi)$ là dấu của hoán vị π. Khi đó, ta có $f(z_1, \dots, z_n) = c$.

Công thức trên được gọi là *công thức Leibniz*. Nó được dùng trong định nghĩa khái niệm định thức.

NGÔ VIỆT TRUNG

Tài liệu tham khảo

1. Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.
2. W. H. Greub, *Linear Algebra*, Springer, New York-Berlin, 1975.
3. S. Rotman, *Advanced Linear Algebra*, Springer, New York, 2005.