DẠNG SONG TUYẾN TÍNH (bilinear form)

Cho E và F là hai không gian véc tơ trên trường K.

Định nghĩa. Ánh xạ $f\colon E \oplus F \to K$ được gọi là *dạng song tuyến tính* trên $E \oplus F$ nếu f thỏa mãn những điều kiện sau:

$$\begin{aligned} f(x+x', y) &= f(x,y) + f(x',y),\\ f(x, y+y') &= f(x,y) + f(x,y'),\\ f(cx,y) = &f(x,cy) = cf(x,y),\ c \in K. \end{aligned}$$

Các điều kiện trên có nghĩa là nếu ta cố định một véc tơ $x \in E$ hay $y \in F$ thì $f(x,y)$ là dạng tuyến tính trên F hay trên E.

Ví dụ. Ánh xạ $f(a_1,a_2) = a_1a_2$ là dạng song tuyến tính trên K^2.

Với mọi dạng song tuyến tính f và g trên $E \oplus F$ ta định nghĩa $f+g$ và cf $(c \in K)$ là hai ánh xạ từ $E \oplus F$ vào K được xác định bởi công thức:

$$\begin{aligned} (f+g)(x,y) &:= f(x,y) + g(x,y),\\ (cf)(x,y) &:= cf(x,y). \end{aligned}$$

Nếu ta cố định $x \in E$ hay $y \in F$ thì $(f+g)(x,y)$ và $(cf)(x,y)$ là những dạng tuyến tính trên F hay E. Do đó $f+g$ và cf cũng là những dạng song tuyến tính trên $E \oplus F$.

Gọi $S(E \oplus F)$ là tập các dạng song tuyến tính trên $E \oplus F$. Ta thấy $S(E \oplus F)$ là không gian véc tơ với hai phép tính trên.

Nếu E và F là hai không gian véc tơ hữu hạn chiều, ta có thể mô tả mọi dạng tuyến tính trên $E \oplus F$ bằng phép nhân ma trận.

Giả sử $\dim E = m$ và $\dim F = n$. Cho $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ và $T = \{y_1, \ldots, y_n\}$ là hai cơ sở của E và F. Ánh xạ $f\colon E \oplus F \to K$ là dạng song tuyến tính khi và chỉ f có dạng

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j c_{ij},$$

với mọi tổ hợp tuyến tính $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in E$ và $y = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j \in F$, trong đó c_{ij}, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$, là một hệ phần tử tùy ý trong K. Khi đó, $c_{ij} = f(x_i, y_j)$, và f là dạng song tuyến tính duy nhất thoả mãn điều kiện này.

Cho f là dạng song tuyến tính trên $E \oplus F$ và C là $m \times n$ ma trận $(f(x_i, y_j))$. Vế phải của công thức trên có thể viết dưới dạng tích các ma trận:

$$f(x, y) = xCy,$$

trong đó ta đồng nhất x với phần tử $(a_1, \ldots, a_m) \in K^m$ viết dưới dạng dòng và y với phần tử $(b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ viết dưới dạng cột. Ta gọi C là *ma trận của dạng song tuyến tính* f theo các cơ sở S và T.

Nếu $E = F$ thì f là dạng song tuyến tính trên E^2. Khi đó ta chọn $T = S$ và gọi C là ma trận của f theo cơ sở S.

Ví dụ. Cho S là hệ cơ sở tự nhiên của K^n. Ánh xạ

$$f(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

trong đó $x = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ và $y = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$, là dạng song tuyến tính trên K^{2n} có ma trận theo S là ma trận đơn vị. Vì vậy,

$$f(x, y) = xy.$$

Dạng song tuyến tính f trên E^2 được gọi là *đối xứng* nếu $f(x, y) = f(y, x)$ và *thay phiên* nếu $f(x, y) = -f(y, x)$ với mọi véc tơ $x, y \in E$.

Nếu K là trường có đặc số khác 2 thì mọi dạng song tuyến tính f trên E^2 đều có thể phân tích thành tổng của một dạng song tuyến tính đối xứng và một dạng song tuyến tính thay phiên trên E^2.

Nếu E là không gian hữu hạn chiều thì f là dạng song tuyến tính đối xứng hay thay phiên khi và chỉ khi ma trận biểu diễn của f theo cùng một hệ cơ sở cho hai vế của $E^2 = E \oplus E$ là đối xứng hay đối xứng lệch.

Ví dụ. Cho $x = (a_1, a_2),\ y = (b_1, b_2)$ là hai phần tử tùy ý trong K^2.

- Hàm $f(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ là dạng song tuyến tính đối xứng.

- Hàm $g(x,y) = a_1b_2 - a_2b_1$ là dạng song tuyến tính thay phiên.

Ma trận biểu diễn của f và g theo hệ cơ sở tự nhiên của K^2 là các ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Cho f là một dạng song tuyến tính trên E^2. Ánh xạ

$$\Gamma(x) := f(x,x)\ (x \in E)$$

được gọi là *dạng toàn phương* trên E sinh bởi f.

Ví dụ. Cho $x = (a_1, a_2),\ y = (b_1, b_2)$ là các phần tử tùy ý của K^2. Dạng song tuyến tính $f(x,y) = a_1b_1 + a_2b_2$ sinh ra dạng toàn phương $\Gamma(x) = a_1^2 + a_2^2$, còn dạng song tuyến tính $g(x,y) = a_1b_2 - a_2b_1$ sinh ra dạng toàn phương $\Gamma(x) = 0$.

Có nhiều dạng song tuyến tính cùng sinh ra một dạng toàn phương. Ta có $g(x,y) := f(y,x)$ cũng là dạng song tuyến tính trên E^2. Rõ ràng f và g sinh ra cùng một dạng toàn phương, nhưng $f \neq g$ nếu f không đối xứng.

Nếu trường K có đặc số khác 2 thì mọi dạng toàn phương Γ được sinh ra bởi duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng h. Dạng này được xác định bởi công thức:

$$h(x,y) = \frac{1}{2}\big[\Gamma(x+y) - \Gamma(x) - \Gamma(y)\big].$$

Dạng song tuyến tính đối xứng sinh ra dạng toàn phương Γ được gọi là *dạng cực* của Γ.

Thông thường, hàm $f(X_1, \ldots, X_n)$ được gọi là dạng toàn phương nếu nó có dạng

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} X_i X_j,$$

trong đó c_{ij} là những hằng số. Nếu E là không gian hữu hạn chiều thì dạng toàn phương trên E có dạng tương tự.

Giả sử $\dim E = n$ và $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ là cơ sở của E. Ánh xạ $\Gamma : E \to K$ là dạng toàn phương trên E khi và chỉ khi Γ có dạng

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_i a_j,$$

với mọi tổ hợp tuyến tính $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, trong đó c_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, là các phần tử tùy ý trong K.

Nếu trường K có đặc số khác 2 thì dạng cực h của dạng toàn phương Γ được xác định bởi công thức

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2} a_i b_j,$$

với mọi tổ hợp tuyến tính $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ và $y = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$.

Ta có thể tìm thấy một cơ sở S của E sao cho ma trận của h theo S là ma trận đường chéo. Khi đó, $c_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$. Vì vậy, Γ có dạng

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2.$$

Ta gọi dạng này là *chính tắc*.

Ví dụ. Cho

$$\Gamma(x) = a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2.$$

Dạng cực của $\Gamma(x)$ là dạng song tuyến tính

$$h(x, y) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2,$$

với $x = (a_1, a_2), y = (b_1, b_2) \in K^2$. Đây là công thức xét theo hệ cơ sở tự nhiên e_1, e_2. Nếu dùng cơ sở $e_1 + e_2, e_1 - e_2$ thì

$$\Gamma(x) = 3c_1^2 - c_2^2,$$

với $x = c_1(e_1 + e_2) + c_2(e_1 - 2_2)$.

LỊCH SỬ

Weierstrass và Kronecker là những người đầu tiên xây dựng lý thuyết dạng song tuyến tính để nghiên cứu dạng toàn phương. Học trò của hai ông là Frobenius đã phát triển lý thuyết này bằng ngôn ngữ ma trận trong công trình "On linear substitutions and bilinear forms" (Phép thế tuyến tính và dạng song tuyến tính) năm 1878. Ông cũng là người nghiên cứu việc phân loại ma trận qua dạng song tuyến tính và mô tả dạng chính tắc của chúng. Ý tưởng phân loại ma trận mô tả dạng toàn phương đã xuất hiện gián tiếp trước đó trong giáo trình "Disquisitiones Arithmeticae" của Gauss năm 1798.

NGÔ VIỆT TRUNG

Tài liệu tham khảo

1. Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.
2. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2019.
3. Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.
4. S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Springer, New York, 1997.