DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN (random vibration)

Bất cứ khi nào một hệ dao động được kích thích bởi lực ngẫu nhiên thì đáp ứng cũng là ngẫu nhiên. Các hệ với các tham số tổng quát được mô tả bởi các phương trình vi phân thường (ODE) với các quá trình ngẫu nhiên.

Phương pháp mômen có thể áp dụng cho bất kỳ hệ thống tuyến tính nào chịu tác động kích thích ngẫu nhiên từ bên ngoài. Phương pháp khác dựa trên việc sử dụng trực tiếp mối liên hệ đáp ứng cơ bản đối với mật độ phổ công suất (PSD). Do đó, nó chỉ có thể áp dụng cho các đáp ứng ở trạng thái ổn định trong các hệ thống bất biến thời gian đối với các kích thích dừng. Tuy nhiên, điều quan trọng là phải hiểu rõ về các hiện tượng, đặc biệt là để giải thích dữ liệu dao động ngẫu nhiên đo được.

Để áp dụng phương pháp mômen, người ta rút gọn các phương trình của hệ về dạng mà tất cả các kích thích đều là nhiễu ồn trắng. Điều này được thực hiện bằng cách đưa ra các bộ lọc cho tất cả các kích thích không ồn trắng và thêm các phương trình của (các) bộ lọc vào các phương trình của hệ. Ví dụ cho $z(t)$ là kích thích có PSD với một đỉnh duy nhất ở tần số ν với một nửa băng thông công suất β. Một phép gần đúng có thể đơn giản cho một PSD như vậy với một đỉnh đơn là

$$S_{zz}(\omega) = \frac{S_0}{(\omega^2 - \nu^2) + 4\beta\omega^2}. \tag{1}$$

Nó cho thấy $z(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân ngẫu nhiên (SDE)

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \nu^2 z = \zeta(t),$$

trong đó $\zeta(t)$ là ồn trắng có cường độ $2\pi S_0$. Điều này yêu cầu một bậc tự do (DOF) bổ sung. Vì vậy, ví dụ, việc nghiên cứu bộ hấp thụ dao động hai bậc tự do (TDOF) cho các ứng dụng ngoài khơi yêu cầu một mô hình có ít nhất ba DOF vì sóng biển thường có tần số kích thích chiếm ưu thế khác không, có thể yêu cầu sử dụng một DOF bổ sung cho bộ lọc.

Do đó, coi véc tơ n chiều u mô tả các chuyển vị và vận tốc x, v và có thể cả các biến lọc z với một số đạo hàm thời gian của chúng. Phương trình ma trận cơ bản được viết dưới dạng

$$\dot{u} = A(t)u + F(t) + B(t)\zeta(t), \tag{2}$$

trong đó $A(t)$ và $B(t)$ là ma trận $n \times n$ tiền định, là véc tơ n chiều của các hàm cưỡng bức tiền định và $\zeta(t)$ là véc tơ n-chiều của nhiễu ồn trắng có trung bình 0. Ồn trắng được xác định với ma trận cường độ $W(t)$ để $\zeta_i(t)\zeta_j(\theta) = W_{ij}(t)\sigma(t-0)$. Biến thiên theo thời gian của cường độ kích thích có thể được sử dụng để mô tả tải động ngẫu nhiên không dừng.

Véc tơ phản ứng $u(t)$ được phân tách thành giá trị trung bình hoặc giá trị kỳ vọng của nó $m(t) = u(t)$ và phần lệch khỏi trung bình $u^0(t) = u(t) - m(t)$. Đáp ứng trung bình được phân tích riêng bằng cách giải phương trình tiền định.

$$\dot{m} = A(t)m + F(t).$$

Ma trận tương quan của phần lệch khỏi trung bình của phản ứng được phân tích sau đó được xác định là

$$R_{uu}(t,\theta) = \langle u^0(t)u^{0T}(\theta)\rangle.$$

Quy trình hai bước được sử dụng dựa trên cặp phương trình ma trận vi phân thường, tiền định, như sau

$$\begin{cases} \dot{D} = AD + DA^T + BWB^T, \\ \dfrac{d}{dt}R_{uu}(\theta,t) = R_{uu}(\theta,t)A^T(t), \\ R_{uu}(\theta,\theta) = D(\theta). \end{cases} \tag{3}$$

Ở đây, D là ma trận phương sai nghĩa là một trường hợp đặc biệt của ma trận tương quan tương ứng với dịch chuyển thời gian bằng không. Nó thu được bằng cách tích phân phương trình đầu tiên cho bất kỳ điều kiện ban đầu nào đã cho tại $t = 0$ nếu chúng là ngẫu nhiên (trong khi $D(0) = 0$ nếu chúng là tiền định). Việc tích phân phương trình thứ hai (phương trình 3) có thể được thực hiện sau đó trong khi hệ thức cuối (phương trình 3) được áp dụng làm điều kiện ban đầu xác định mối quan hệ giữa D và R. Ví dụ, hãy xem xét hệ thống SDOF với kích thích ồn trắng

$$\ddot{X} + 2\alpha\dot{X} + \Omega^2 X = \zeta(t). \tag{4}$$

Cho ồn trắng trung bình bằng 0 với cường độ D. Viết lại phương trình 4 dưới dạng phương trình 2 với $u_1 = X$, $u_2 = \dot{X}$, bộ ba phương trình sau đây có phương sai thu được dưới dạng phiên bản vô hướng của phương trình ma trận (phương trình 3):

$$\begin{cases} \dot{D_{11}} = 2D_{12}, \\ \dot{D_{12}} = D_{22} - 2\alpha D_{12} - \Omega^2 D_{11}, \\ \dot{D_{22}} = -4\alpha D_{22} - 2\Omega^2 D_{12} + D_\zeta. \end{cases} \tag{5}$$

Hệ này có một nghiệm trạng thái dừng (không đổi) đơn giản thu được bằng cách cho vế phải bằng 0

$$\begin{cases} D_{11}(t) = \dfrac{D_\zeta}{4\alpha\Omega^2}, \\ D_{12} = 0, \\ D_{22} = \dfrac{D_\zeta}{4\alpha}. \end{cases} \tag{6}$$

Trạng thái dừng này chỉ tồn tại trong trường hợp có giảm chấn. Nghiệm tức thời đối với phương trình 5 cho trường hợp không có giảm chấn ($\alpha = 0$) cho điều kiện ban đầu bằng không cho thấy sự tăng tuyến tính của chuyển vị bình phương trung bình và vận tốc theo thời gian

$$D_{11}(t) = \frac{D_\zeta}{2\Omega^2}t, \quad D_{22}(t) = \frac{D_\zeta}{2}t.$$

Áp dụng phương trình ma trận thứ hai (phương trình 4), chúng ta có thể suy ra ba phương trình vi phân thường cho các hàm tự tương quan R. Đối với đáp ứng dừng, đối số duy nhất của chúng sẽ là $\tau = t - \theta$. Biểu diễn các đạo hàm theo đối số này bằng các dấu phẩy, ta thu được ODE sau cho hàm tự tương quan của đáp ứng dịch chuyển

$$R''_{11} + 2\alpha R'_{11} + 2\Omega^2 R_{11} = 0$$

trùng với phương trình dao động tự do. Nghiệm của nó thỏa mãn điều kiện ban đầu $R_{11}(0) = D_{11}$ có dạng

$$R_{11}(\tau) = D_{11}\exp(-\alpha\tau)[\cos\omega_d\tau + (\alpha/\omega_d)\sin\omega_d\tau],$$

trong đó

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}, \quad \tau > 0.$$

Điều kiện ban đầu khác được thỏa mãn bởi biểu thức này cũng đúng vì $R''_{11} = R_{12}$ và $D_{12} = 0$ theo nghiệm (phương trình 6).

Do đó, phân tích tương quan của phản ứng đo được đối với kích thích ngẫu nhiên có thể được sử dụng để đánh giá trực tiếp tần số tự nhiên của hệ thống và giảm chấn khi không thể thực hiện thử nghiệm dao động tự do. Các phép đo kích thích không cần thiết miễn là có thể giả định một cách hợp lý rằng mật độ phổ công suất (PSD) của nó là thông rộng đối với hệ. Độ giảm chấn có thể được ước tính một cách thuận tiện bằng cách vẽ đường bao (được cho là hàm mũ) của hàm tự tương quan.

NGUYỄN ĐÔNG ANH

Tài liệu tham khảo

1. P. C. Muller, W. O Schiehlen, *Dao động tuyến tính*, Nxb. Xây dựng, Hà Nội. (Người dịch: Nguyễn Đông Anh), 1997.
2. S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley Pubs, 2nd Ed., US, 1990. .