ĐẠO HÀM (derivative)

Đây là một trong những khái niệm cơ bản của giải tích toán học.

Cho f là một hàm thực một biến nhận giá trị thực được xác định trong một lân cận của điểm x_0. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Khi đó giới hạn này được gọi là đạo hàm của f tại điểm x_0. Nếu đặt $y = f(x)$, $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, thì giới hạn giới hạn trên có thể được viết như sau:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ta thường sử dụng các ký hiệu $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$,... để biểu thị giới hạn này.

Các phép tính đạo hàm được gọi là phép tính vi phân. Nếu đạo hàm $f'(x_0)$ là hữu hạn, ta nói f khả vi tại điểm x_0. Một hàm khả vi tại mọi điểm của một tập hợp được gọi là khả vi trên tập hợp đó. Một hàm khả vi bao giờ cũng liên tục. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng: tồn tại những hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào của một khoảng.

Một tổng quát hóa của khái niệm đạo hàm là khái niệm đạo hàm đối với một tập hợp. Cho f là một hàm thực một biến nhận giá trị thực được xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$ là một điểm gới hạn của D. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in D} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Khi đó giới hạn này được gọi là đạo hàm của f tại điểm x_0 đối với tập hợp D và được ký hiệu là $f'_D(x_0)$. Đạo hàm một phía là một trong những dẫn xuất của khái niệm này.

Định nghĩa trên của đạo hàm (và các tổng quát hóa), cũng như các tính chất đơn giản của nó có thể được mở rộng hầu như không thay đổi đối với các hàm thực hoặc phức nhận giá trị phức hoặc giá trị véc tơ. Hơn nữa, tồn tại khái niệm đạo hàm của một hàm nhận giá trị vô hướng trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ (xem gradient), khái niệm đạo hàm có biến là tập hợp đối với một độ đo (đặc biệt đối với diện tích, thể tích, v.v.). Khái niệm đạo hàm có thể được mở rộng cho hàm số nhận giá trị véc tơ trong một không gian trừu tượng (xem phép tính vi phân của ánh xạ).

Xem mục "Các phép tính vi phân" để biết thêm diễn giải về ý nghĩa hình học và cơ học của đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm đơn giản nhất, các đạo hàm bậc cao, các đạo hàm riêng cũng như các tài liệu tham khảo.

ĐINH DŨNG

Tài liệu tham khảo

1. E. A. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1967.
2. G. M. Fichtenholz, *Differential und Integralrechnung*, 1–3 , Deutsch. Verlag Wissenschaft, Berlin, 1964.
3. S. M. Nikol'skii, *A course of Mathematical Analysis*, 1–2 , MIR, Moscow, 1977 (Translated from Russian).
4. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976, pp. 75–78.
5. G. E. Shilov, *Mathematical Analysis*, 1–2 , M.I.T., Cambridge, 1974 (Translated from Russian).
6. K. R. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, CA, 1981.
7. E. T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952, pp. Chapt. 6.
8. V. Zorich, *Mathematical Analysis*, Springer, Berlin, 2015.