ĐẠO HÀM RIÊNG (partial derivative)

ĐỊNH NGHĨA

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Đạo hàm riêng bậc nhất của hàm nhiều biến $f\colon D \to \mathbb{R}$ đối với một trong các biến x_j, $j = 1, \ldots, n$, là đạo hàm thường bậc nhất của hàm f, nếu xét f như hàm một biến theo x_j và giữ các biến còn lại cố định. Chính xác hơn chúng ta có định nghĩa sau đây. Nếu một hàm f được xác định trong lân cận U của điểm $a = (a_1, \ldots, a_n)$, thì đạo hàm riêng $(\partial f/\partial x_j)(a)$ của f đối với biến x_j tại điểm a được định nghĩa là đạo hàm thường $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x_j)$ tại điểm a_j của hàm $f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n)$ theo biến duy nhất x_j. Nói cách khác,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_j}(a_1, ..., x_j, ..., a_n)\right|_{x_j = a_j}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_j + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_j, ..., a_n)}{h}.$$

Các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad k_1 + \cdots + k_n = k,$$

bậc cao $k > 1$ được định nghĩa bằng quy nạp: Nếu đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_i^{k_i} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad k_1 + \cdots + k_n = k - 1,$$

đã được xác định, thì theo định nghĩa

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_i^{k_i+1} \ldots \partial x_n^{k_n}} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_i^{k_i} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right). \tag{1}$$

Đạo hàm riêng (1) còn được ký hiệu là $D^k_{k_1 \ldots k_n} f$. Đạo hàm riêng (1) trong đó có ít nhất hai chỉ số riêng biệt k_i khác 0 được gọi là đạo hàm riêng hỗn hợp; ngược lại, nếu đạo hàm riêng có dạng $\partial^k f/\partial x_i^k$, thì được gọi là không hỗn hợp.

ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

Cho $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ là một hàm nhiều biến được xác định trên tập hợp $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Hàm f được gọi là khả vi tại điểm x trên D nếu $x \in D$ và

$$f(x+h) - f(x) = L(x)(h) + \varepsilon(x;h), \tag{2}$$

với $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là một hàm tuyến tính theo h và $\varepsilon(x;h)$ là một đại lượng vô cùng bé theo h khi $h \to 0$ và $x+h \in D$.

Các véc tơ

$$\Delta x(h) := h,$$
$$\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x),$$

được gọi tương ứng là số gia của biến số và số gia của hàm số. Hàm tuyến tính $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được gọi là vi phân, ánh xạ tiếp tuyến hoặc ánh xạ đạo hàm của hàm số $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ tại điểm $x \in D$ và được ký hiệu $\mathrm{d}f(x)$, $Df(x)$ hoặc $f'(x)$. Như vậy, chúng ta có thể viết:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)(h) + \varepsilon(x;h),$$

hoặc

$$\Delta f(x;h) = \mathrm{d}f(x)(h) + \varepsilon(x;h).$$

Đẳng thức (2) có thể viết dưới dạng tọa độ tương đương

$$f_j(x+h) - f_j(x) = L_j(x)(h) + \varepsilon_j(x;h), \ \ j = 1, \dots, n,$$

với $L_j(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là các hàm tuyến tính và $\varepsilon_j(x;h)$ là một đại lượng vô cùng bé theo h khi $h \to 0$ và $x+h \in D$ với tất cả $j = 1, \dots, n$.

Hàm $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ xác định trên tập hợp $D \subseteq \mathbb{R}^m$ khả vi tại điểm $x \in D$ khi và chỉ khi các hàm tọa độ $f_j\colon D \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, khả vi tại điểm x. Vì thế để nghiên cứu tính khả vi của f chỉ cần nghiên cứu tính khả vi của các hàm tọa độ f_j.

Như vậy, chúng ta xét hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ xác định trên tập hợp $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Với $x = (x_1, \dots, x_m)$, $h = (h_1, \dots, h_m)$ và $L(x)(h) = a_1(x)h_1 + \cdots + a_m h_m$ (2) có thể viết dưới dạng toạ độ như sau:

$$f(x_1+h_1, \dots, x_m+h_m) - f(x_1, \dots, x_m) = a_1(x)h_1 + \cdots + a_m h_m + \varepsilon(x;h). \tag{3}$$

Trong trường hợp đặc biệt khi tất cả $h_i = 0$ với $i \neq j$, ta có

$$f(x_1, \ldots, x_j + h_j, \ldots, x_m + h_m) - f(x_1, \ldots, x_m) \;=\; a_j(x)h_j + \varepsilon(x; h_j).$$

Từ đây suy ra

$$a_j(x) \;=\; \lim_{h_j \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + h_j, \ldots, x_m + h_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{h_j} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Nếu hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ được xác định trên $D \subseteq \mathbb{R}^n$ khả vi tại điểm $x \in D$, khi đó f có đạo hàm riêng bậc nhất theo từng biến tại x và vi phân của f được xác định một cách duy nhất bằng các đạo hàm riêng của nó tại điểm này theo công thức sau:

$$\mathrm{d}f(x)h \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j.$$

Tuy nhiên điều ngược lại không đúng: việc tồn tại đạo hàm riêng theo tất cả các biến không đảm bảo cho tính khả vi của đạo hàm. Ví dụ sau đây sẽ chỉ ra điều này. Hàm số hai biến

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0, & \text{nếu } \; x_1x_2 = 0, \\ 1, & \text{nếu } \; x_1x_2 \neq 0, \end{cases}$$

bằng 0 tại $(0,0)$, nên tại điểm này nó có cả hai đạo hàm riêng bằng 0 theo cả hai biến x_1 và x_2. Nhưng hàm f lại không khả vi tại $(0,0)$ vì tại điểm này f không liên tục.

Hàm trên đây không có đạo hàm riêng tại các điểm khác $(0,0)$. Tuy nhiên, hàm số hai biến

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{nếu } \; x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 1, & \text{nếu } \; x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

có đạo riêng theo cả hai biến trên mặt phẳng tọa độ. Nhưng hàm f lại không khả vi tại $(0,0)$ vì tại điểm này f không liên tục.

Nếu trong định nghĩa đạo hàm riêng, khái niệm đạo hàm thường được thay thế bằng khái niệm đạo hàm tổng quát theo một cách nào đó, thì người ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng tổng quát tương ứng.

ĐINH DŨNG

Tài liệu tham khảo

1. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire de Mathématique*, Hermann, Paris, 1960.
2. S. M. Nikol'skii, *A course of Mathematical Analysis*, 1–2 , MIR, Moscow, 1977.
3. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.
4. V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer, Berlin, 2015.