ĐA THỨC (polynomial)

Đa thức là một biểu thức f có dạng

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

trong đó x là biến số và $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những số cho trước, là *đa thức*. Người ta hay dùng ký hiệu $f(x)$ thay cho f để chỉ f là đa thức của biến x.

Các thành phần $a_0, a_1 x, \ldots, a_n x^n$ được gọi là các *hạng tử* của f. Với mọi $i = 0, 1, \ldots, n$, số a_i được gọi là *hệ số* của x^i trong f. Nếu $a_n \neq 0$ thì n được gọi là *bậc* của f, ký hiệu là $\deg f$. Khi đó, ta gọi a_n là *hệ số đầu* của f.

Nếu $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ thì ta gọi f là *đa thức không*, ký hiệu cũng là 0. Để cho tiện, ta quy định $\deg 0 = -\infty$ theo nghĩa $\deg 0$ nhỏ hơn n với mọi $n \geq 0$. Nếu $\deg f = 0$ thì $f = a_0 \neq 0$ là một số. Nếu $\deg f = 1$ thì f được gọi là một *đa thức tuyến tính*.

Nếu ta coi x như là một số thông thường thì ta có thể thực hiện các phép tính cộng, trừ và nhân hai đa thức với nhau và vẫn nhận được kết quả là một đa thức. Ví dụ như nếu

$$g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

là một đa thức khác với $m \leq n$ thì

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n,$$

trong đó $b_i = 0$ với mọi $i > m$. Ta cũng dễ dàng thấy

$$fg = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_n b_m)x^{m+n}.$$

Ta không có phép chia hai đa thức f/g vì nói chung ta không thể tìm thấy đa thức h sao cho $f = gh$. Tuy nhiên ta luôn luôn có thể chia h cho g theo nghĩa sau:

Bổ đề. Cho f và g là hai đa thức khác không. Ta luôn tìm thấy các đa thức h và v sao cho

$$f = gh + v,$$

với $\deg v < \deg g$. Các đa thức h và v được xác định một cách duy nhất với các tính chất trên.

Ta gọi h là *thương*, v là *phần dư* của phép chia f cho g. Điều kiện $\deg v < \deg g$ tương tự như khi chia hai số tự nhiên cho nhau ta sẽ nhận được một phần dư nhỏ hơn số chia.

Ta có thể xác định h và v theo thuật toán sau. Đặt $n = \deg f$ và $m = \deg g$. Nếu $n < m$ thì ta đặt $h = 0$ và $v = f$. Khi đó thuật toán sẽ dừng. Nếu $n \geq m$ thì ta xét đa thức

$$f_1 := f - \frac{a}{b}x^{n-m}g,$$

trong đó a và b là hệ số đầu của f và g. Rõ ràng là f có thể viết dưới dạng $gh + v$ nếu f_1 có thể viết dưới dạng $gh_1 + v$ với $\deg v < \deg g$. Ta tiếp tục quá trình trên với f_1 và g. Do $\deg f_1 < m = \deg g$ nên quá trình này phải dừng ở một bước thứ i nào đó, có nghĩa là f_i có thể viết dưới dạng $gh_i + v$ với $\deg v < \deg g$. Từ đây suy ra f có thể viết dưới dạng $gh + v$ với $\deg v < \deg g$. Thuật toán trên đây được gọi là *thuật toán Euclid*.

Nếu $f = gh$ hay là $v = 0$ thì ta nói f *chia hết* cho g hay g là *ước* của f.

Trong trường hợp $g = x - c$ với c là một số nào đó thì $\deg v < \deg g = 1$. Nếu $\deg v = 0$ thì v là một số khác không. Nếu $\deg v < 0$ thì v chỉ có thể là không. Tóm lại ta luôn luôn có thể viết

$$f = (x - c)h + v,$$

với v là một số nào đó.

Ta có thể coi mỗi đa thức f như một hàm số với

$$f(c) = a_0 + a_1c + \cdots + a_nc^n.$$

Số c được gọi là nghiệm của f nếu $f(c) = 0$. Từ công thức $f = (x - c)h + v$ ta nhận được mối liên hệ sau giữa nghiệm và tính chia hết của f.

Bổ đề. $f(c) = 0$ khi và chỉ khi f chia hết cho $x - c$.

Nếu c là nghiệm của f thì ta có $f = (x - c)h$ với $\deg h = \deg f - 1$. Người ta gọi số mũ s lớn nhất sao cho f chia hết cho $(x - c)^s$ là *bội* của nghiệm c, có nghĩa là $f = (x - c)^s h$ với $h(c) \neq 0$. Khi đó ta có thể coi f có s nghiệm c.

Ta có thể ước lượng số nghiệm của một đa thức như sau.

Định lý. Nếu $\deg f = n$ thì f có nhiều nhất n nghiệm.

Ta gọi đa thức f là *bất khả quy* nếu f không chia hết cho bất kỳ một đa thức bậc dương nhỏ hơn $\deg f$. Ví dụ như mọi đa thức tuyến tính đều là bất khả quy. Khái niệm bất khả quy mở rộng khái niệm số nguyên tố trong số học.

Thực ra tính bất khả quy phụ thuộc vào việc ta xét các đa thức trên tập hệ số nào. Nếu ta chỉ xét các đa thức có hệ số hữu tỷ thì đa thức $x^2 - 2$ là đa thức bất khả quy. Đa thức này không bất khả quy trên tập các số thực vì $x^2 - 2$ chia hết cho $x - \sqrt{2}$.

Tổng quát hơn ta có thể xét các đa thức trên một vành A có đơn vị. Khi đó, *đa thức trên* A là một biểu thức f có dạng

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

trong đó x là biến số và $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$. Các khái niệm cơ bản liên quan đến đa thức được định nghĩa tương tự như trường hợp đa thức thông thường.

Do ta có thể cộng, trừ và nhân hai đa thức trên A với nhau nên tập hợp tất cả các đa thức trên A lập thành một vành được gọi là *vành đa thức* trên A, ký hiệu là $A[x]$.

Ta gọi đa thức f là *chuẩn hóa* nếu hệ số đầu của f là phần tử nghịch đảo trong A. Khi đó ta có thể mở rộng bổ đề về phép chia hai đa thức như sau:

Bổ đề. Cho $g \in A[x]$ là đa thức chuẩn hóa. Ta có thể viết mọi đa thức $f \in A[x]$ dưới dạng

$$f = gh + v,$$

với $h, v \in A[x]$ và $\deg v < \deg g$. Các đa thức h và v được xác định một cách duy nhất qua các tính chất trên.

Chú ý rằng nếu A là một trường thì mọi đa thức $g \in A[x]$ đều có thể viết dưới dạng $g = ag_1$, trong đó a là hệ số đầu của g và g_1 là đa thức chuẩn hóa. Khi đó ta gọi g_1 là *đa thức chuẩn hóa của* g. Ta có thể chia f cho g bằng cách chia f cho g_1. Vì vậy định lý trên vẫn đúng cho mọi đa thức $g \neq 0$ nếu A là một trường.

Ta gọi đa thức f là *bất khả quy* trong $A[x]$ nếu f không chia hết cho bất kỳ một đa thức bậc dương nhỏ hơn $\deg f$ trong $A[x]$. Nếu A là một trường thì ta có thể phân tích mọi đa thức $f \in A[x]$ thành tích các đa thức bất khả quy và tập các đa thức chuẩn hóa của các đa thức bất khả quy xuất hiện trong một sự phân tích như vậy được xác định một cách duy nhất.

Đa thức n biến trên A là một biểu thức f có dạng

$$f = \sum_{r_1+\cdots+r_n \leq r} c_{r_1,\ldots,r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

trong đó $x_1, \ldots, x_n$ là các biến số và $c_{r_1,\ldots,r_n} \in A$ với mọi bộ số nguyên $r_1, \ldots, r_n \geq 0$ thoả mãn $r_1 + \cdots + r_n \leq r$, với $r \geq 0$ là một số nguyên cho trước. Các phần tử $c_{r_1,\ldots,r_n}$ được gọi là *hệ số* của f. Các thành phần $c_{r_1,\ldots,r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ được gọi là các *hạng tử* của f. Người ta hay dùng ký hiệu $f(x_1, \ldots, x_n)$ thay cho f để chỉ f là đa thức của các biến $x_1, \ldots, x_n$.

Các biểu thức $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ được gọi là *đơn thức*. Bậc của đơn thức $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ là tổng $r_1 + \cdots + r_n$ của các số mũ. Nếu $r_1 = \cdots = r_n = 0$ thì $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} = 1$. Ta quy định bậc của đa thức 0 là $-\infty$. *Bậc* của đa thức $f \neq 0$ là bậc lớn nhất của các đơn thức với hệ số khác không của f. Ta ký hiệu bậc của f với $\deg f$. Chú ý rằng $\deg f \leq 0$ khi và chỉ khi $f \in A$.

Khi viết một đa thức nhiều biến người ta thường sắp xếp các hạng tử theo một thứ tự nào đó của các đơn thức. Thứ tự thường được sử dụng nhất là *thứ tự từ điển* coi $x_1, ..., x_n$ như những chữ cái và đơn thức $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ như một chữ bao gồm r_1 chữ cái x_1,..., r_n chữ cái x_n. Như vậy, $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ sẽ đứng trước $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$ nếu $r_1 < s_1$ hay $r_1 = s_1$ nhưng $s_2 < r_2$, v.v. Theo thứ tự từ điển thì ta có thể coi $1 < x_1 < x_2 < x_1^2 < x_1x_2 < x_2^2 < \cdots < x_1x_2^{r-1} < x_2^r$.

Khi đó ta có thể viết mọi đa thức hai biến bậc r dưới dạng

$$f = c_{0,0} + c_{10}x_1 + c_{01}x_2 + \cdots + c_{1,r-1}x_1x_2^{r-1} + c_{0,r}x_2^r.$$

Nếu ta coi $x_1, \ldots, x_n$ như các phần tử trong A thì ta có thể thực hiện các phép tính cộng, trừ và nhân với các đa thức n biến trên A. Tập các đa thức n biến trên A được gọi *vành đa thức n biến* trên A, ký hiệu là $A[x_1, \ldots, x_n]$. Ta có thể coi $A[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức của biến x_n trên vành đa thức $(n-1)$ biến $A[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, có nghĩa là

$$A[x_1, \ldots, x_n] := A[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n].$$

Điều này cho phép ta quy việc nghiên cứu vành đa thức nhiều biến về việc nghiên cứu vành đa thức một biến.

Với mọi $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A^n$ ta ứng với đa thức f ở trên một phần tử $f(a) \in A$ như sau:

$$f(a) = \sum_{r_1+\cdots+r_n \leq r} c_{r_1,\ldots,r_n}\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n}.$$

Nếu $f(a) = 0$ thì ta gọi a là *nghiệm* của f. Ta có thể coi f là một hàm từ A^n vào A và tập nghiệm của f như là một hình hình học trong A^n. Các khái niệm này cho ta một cầu nối giữa đại số và hình học.

Đa thức f được gọi là *thuần nhất* nếu mọi hạng tử khác không của f đều có cùng bậc. Ví dụ như $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ là đa thức thuần nhất. Nếu $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ là nghiệm của đa thức thuần nhất f thì $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$ cũng là nghiệm của f. Các nghiệm dạng này có thể coi như một đường thẳng đi qua điểm gốc $(0, \ldots, 0)$ của A^n. Vì vậy tập nghiệm của một đa thức thuần nhất là hợp của một số đường thẳng đi qua điểm gốc. Điều này dẫn đến sự ra đời của *hình học xạ ảnh* coi mỗi đường thẳng đi qua điểm gốc như là một điểm trong một không gian mới.

NGÔ VIỆT TRUNG