ĐIỂM CỰC BIÊN (extreme point)

Các điểm cực biên có vai trò quan trọng trong việc biểu diễn các tập lồi. Các phương án cực biên - tức là các điểm cực biên của tập ràng buộc - được sử dụng nhiều trong quy hoạch tuyến tính, đặc biệt là trong thuật toán đơn hình của G. B. Dantzig.

TẬP LỒI TRONG CÁC KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi khác rỗng. Điểm $x \in D$ được gọi là *một điểm cực biên* (an extreme point) của D nếu không tồn tại đoạn thẳng nào thuộc D mà có chứa x ở miền trong của nó. Điều này có nghĩa là không tồn tại $y, z \in D$ và $t \in (0,1)$ sao cho $x = (1-t)y + tz$.

Tam giác trong $\mathbb{R}^2$ có 3 điểm cực biên là ba đỉnh của nó. Khối tứ diện trong $\mathbb{R}^3$ có 4 điểm cực biên là bốn đỉnh của nó. Tập điểm cực biên của tập hợp

$$A := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\} \qquad (a, b > 0),$$

(phần mặt phẳng giới hạn bởi một hình elíp) là tập điểm biên của nó: $\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$. Nói riêng ra, A có vô số điểm cực biên. Tập lồi $B := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x_2 \geq x_1^2 \right\}$ có tập điểm cực biên không giới nội: $\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x_2 = x_1^2 \right\}$.

Định lý biểu diễn tập lồi compact *Cho $\mathbb{R}^n$ là một tập lồi compact khác rỗng. Khi đó, $D = \mathrm{co}\,(\mathrm{extr}\, D)$, ở đó $\mathrm{extr}\, D$ là tập điểm cực biên của D và $\mathrm{co}\,\Omega$ ký hiệu bao lồi của Ω. Nói cách khác, mỗi điểm của D đều có thể biểu diễn được dưới dạng một tổ hợp lồi của các điểm cực biên của D.*

Theo định nghĩa, *phương cực biên* (an extreme direction) của một tập lồi là một diện (a face) – xem mục "Diện của tập lồi" – có dạng nửa đường thẳng của nó. Có thể biểu diễn một tập lồi đóng dưới dạng bao lồi của tập các điểm cực biên và các phương cực biên của nó, nếu như tập lồi đóng đã cho không chứa một đường thẳng nào. Như một ví dụ minh họa cho kết quả này, có thể xét tập lồi

$$C := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \leq 1,\ x_2 \geq x_1^2 \right\},$$

và để ý rằng:

(a) $\operatorname{extr} C = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \leq 1,\ x_2 = x_1^2 \right\}$;

(b) C có một phương cực biên là nửa đường thẳng

$$\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 = 1,\ x_2 \geq 1 \right\}.$$

TẬP LỒI TRONG CÁC KHÔNG GIAN VÔ HẠN CHIỀU

Khái niệm điểm cực biên trình bày ở trên vẫn áp dụng được cho các tập lồi trong không gian tô pô tuyến tính bất kỳ. Ký hiệu $\operatorname{extr} D$ vẫn được sử dụng để chỉ tập điểm cực biên của một tập lồi D.

Định lý Krein-Milman *Cho X là một không gian tô pô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff và $D \subseteq X$ là một tập lồi compact khác rỗng. Khi đó, ta có $D = \overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{extr} D)$, ở đó $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ ký hiệu bao lồi đóng của Ω (tức là bao đóng của bao lồi của D). Nói cách khác, mỗi điểm của D đều có thể biểu diễn được dưới dạng giới hạn của một dãy các tổ hợp lồi của các điểm cực biên của D.*

NGUYỄN ĐÔNG YÊN

Tài liệu tham khảo

1. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
2. W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd Edition, McGraw Hill, New York, 1991.