

ĐIỂM YÊN NGỰA (saddle point)

Điểm yên ngựa (saddle point) là một khái niệm cơ bản trong *lý thuyết trò chơi* (Game Theory).

TRÒ CHƠI HAI NGƯỜI VÀ ĐIỂM YÊN NGỰA

Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là *tập các chiến lược* (the set of strategies) của người chơi thứ nhất. Cho $D \subseteq \mathbb{R}^m$ là tập các chiến lược của người chơi thứ hai. Các tập hợp này có thể có hữu hạn hoặc vô hạn phần tử. Cho hàm số thực $f: C \times D \rightarrow \mathbb{R}$. Khi người chơi thứ nhất chọn chiến lược $x \in C$ và người chơi thứ hai chọn chiến lược $y \in D$, thì $f(x, y)$ là *lợi ích* (gain) mà người chơi thứ nhất có được. Nếu trò chơi có tổng không đổi là γ , thì lợi ích mà người chơi thứ hai có được là $g(x, y) = \gamma - f(x, y)$. Vì thế, nếu biết rằng người chơi thứ nhất chọn chiến lược $x \in C$, thì người chơi thứ hai sẽ mong muốn chọn phương án một chiến lược $y \in D$ sao cho lợi ích $g(x, y)$ là cực đại, tức là *sự thua thiệt* (loss) $-f(x, y)$ là cực tiểu. Tương tự, nếu biết rằng người chơi thứ hai chọn chiến lược $y \in D$, thì người chơi thứ nhất sẽ mong muốn chọn một chiến lược $x \in C$ sao cho lợi ích $f(x, y)$ là cực đại. Không giảm tổng quát, ta có thể coi $\gamma = 0$, tức là xét *trò chơi hai người có tổng bằng 0* (a two-person zero-sum game). Đặt

$$v^- = \sup_{x \in C} \left[\inf_{y \in D} f(x, y) \right], \quad v^+ = \inf_{y \in D} \left[\sup_{x \in C} f(x, y) \right],$$

ta có $v^- \leq v^+$. Người ta gọi v^- là *giá trị dưới của trò chơi* (the lower value of the game), còn v^+ là *giá trị trên của trò chơi* (the upper value of the game). Số v^- là lợi ích tối thiểu mà người chơi thứ nhất phải có – còn được gọi là *sàn trò chơi* (the game floor) của người chơi thứ nhất. Tương ứng, v^+ là sự thua thiệt lớn nhất mà người chơi thứ hai phải chịu – còn được gọi là *trần mất* (the loss ceiling) của người chơi thứ hai. Nếu $v^- = v^+$, thì số $v := v^- = v^+$ được gọi là *giá trị của trò chơi* (the game value).

Cặp chiến lược $(\bar{x}, \bar{y}) \in C \times D$ được gọi là một *điểm yên ngựa* (a saddle point) của hàm f nếu

$$f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, y) \quad \forall (x, y) \in C \times D. \quad (1)$$

Vì bất đẳng thức thứ nhất ở trong (1) nghiệm đúng với mọi $x \in C$, nên $f(\bar{x}, \bar{y})$ là lợi ích lớn nhất mà người chơi thứ nhất có được khi người chơi thứ hai quyết chọn chiến lược \bar{y} . Tương tự, vì bất đẳng thức thứ hai ở trong (1) nghiệm đúng với mọi $y \in D$, nên $f(\bar{x}, \bar{y})$ là sự thua thiệt nhỏ nhất mà người chơi thứ hai có được khi người chơi thứ nhất quyết chọn chiến lược \bar{x} . Do đó, nếu cặp phương án $(\bar{x}, \bar{y}) \in C \times D$ thỏa mãn (1) đã được chọn, thì mỗi người chơi đều không có nhu cầu thay đổi phương án của mình.

• Nếu f có điểm yên ngựa, thì $v^- = v^+$. Điều ngược lại nói chung không đúng.

• Bất đẳng thức $v^- < v^+$ có thể xảy ra ngay cả khi C và D là các tập hữu hạn và $f(x, y) = x^T Ay$, ở đó A là ma trận cấp $n \times m$. Khi đó, hàm $f: C \times D \rightarrow \mathbb{R}$ không có điểm yên ngựa.

Thuật ngữ "điểm yên ngựa" ược sử dụng vì, trong nhiều trường hợp, nếu hàm số f có điểm yên ngựa theo nghĩa (1), thì đồ thị của nó trông giống như một chiếc yên ngựa. Lấy $C = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $D = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, và $f(x, y) = ay^2 - bx^2$ với $a > 0$, $b > 0$, dễ thấy rằng $(\bar{x}, \bar{y}) := (0, 0)$ là điểm yên ngựa duy nhất của f trên $C \times D$.

CÁC ĐỊNH LÝ MINIMAX

Nếu đẳng thức

$$\sup_{x \in C} \left[\inf_{y \in D} f(x, y) \right] = \inf_{y \in D} \left[\sup_{x \in C} f(x, y) \right] \quad (2)$$

nghiệm đúng, thì nó được gọi là *đẳng thức minimax* (a minimax equality). Chữ "minimax" là từ ghép "min-i-max" (min và max, hay cực tiểu và cực đại). Các định lý trình bày các điều kiện đủ để có đẳng thức minimax được gọi các định lý minimax (minimax theorems). Có nhiều dạng định lý minimax khác nhau.

Định lý sau đây chẳng những chỉ ra các điều kiện đủ để có (2), mà còn chỉ ra sự tồn tại của điểm yên ngựa. Kết quả này đã được John von Neumann chứng minh vào năm 1928 và cho đến nay vẫn là một trong những định lý quan trọng nhất của lý thuyết trò chơi.

Định lý von Neumann. Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ và $D \subset \mathbb{R}^m$ là các tập lồi, compact, khác rỗng, và $f: C \times D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Nếu với mỗi $x \in C$ hàm số

$f(x, \cdot)$ là lồi ở trên D , và với mỗi $y \in D$ hàm số $f(\cdot, y)$ là lõm ở trên C (tức là hàm số $-f(\cdot, y)$ là lồi trên C), thì đẳng thức (2) nghiệm đúng và, hơn thế, f có điểm yên ngựa.

Lưu ý rằng kết luận của định lý trên vẫn đúng dưới các điều kiện giảm nhẹ như sau: (a) C và D là các tập con khác rỗng trong các không gian tô pô tuyến tính; (b) $f(x, \cdot)$ là nửa liên tục dưới ở trên D với mỗi $x \in C$ và tồn tại $x^0 \in C$ sao cho hàm số $f(x^0, \cdot)$ có các tập mức dưới là compact; (c) $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in D$ và tồn tại $y^0 \in D$ sao cho hàm số $f(\cdot, y^0)$ có các tập mức trên là compact.

Định lý minimax lệch (the lopsided minimax theorem) đưa ra các điều kiện đủ để đẳng thức minimax (2) nghiệm đúng và tồn tại một điểm $\bar{x} \in C$ sao cho

$$\sup_{y \in D} f(\bar{x}, y) = \inf_{y \in D} \left[\sup_{x \in C} f(x, y) \right].$$

Cùng với Định lý von Neumann, Định lý minimax lệch là một công cụ mạnh để chứng minh sự tồn tại nghiệm của nhiều bài toán bất đẳng thức biến phân và để nghiên cứu tính ổn định vi phân của các bài toán tối ưu có tham số.

NGUYỄN ĐÔNG YÊN

Tài liệu tham khảo

1. J.-P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.
2. J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1984.
3. E. N. Barron, *Game Theory: An Introduction*, Second Edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2013.
4. H. W. Kuhn, *Lectures on the Theory of Games*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 37, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.
5. J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Math. Ann. 100, 295–320 (1928) (English Translation: *On the Theory of Games of Strategy* [by Mrs. Sonya Bargmann] in A. W. Tucker, R. D. Luce (Eds.), “*Contributions to the Theory of Games*” Vol. IV, 13–42 (1959). <https://doi.org/10.1007/BF01448847>)
6. J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, The 4th printing of the 2004 Sixtieth-anniversary Edition. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2007.