DIỆN CỦA TẬP LỒI (faces of convex sets)

DIỆN CỦA TẬP LỒI TRONG CÁC KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU

Cho D là một tập lồi trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Một tập con lồi $F \subseteq D$ được gọi là một *diện* (a face) của D nếu mỗi đoạn thẳng thuộc D mà có phần trong tương đối có giao khác rỗng với F đều nằm trọn vẹn trong F. Điều này có nghĩa là với mọi $x^1, x^2 \in D$ mà có tồn tại $t \in (0,1)$ sao cho $(1-t)x^1 + tx^2 \in F$, thì ta phải có $x^1 \in F$ và $x^2 \in F$. Tập rỗng là một diện của D. Bản thân D cũng là một diện của nó. So sánh định nghĩa diện với định nghĩa điểm cực biên, ta thấy rằng mỗi điểm cực biên là một diện 0-chiều của D. Điều ngược lại cũng đúng.

Hình tam giác trong $\mathbb{R}^2$ có 8 diện, đó là tập rỗng, ba đỉnh của tam giác (là 3 diện 0-chiều), ba cạnh của tam giác (là 3 diện một chiều), bản thân hình tam giác đã cho (là diện hai chiều duy nhất). Khối tứ diện trong $\mathbb{R}^3$ có 16 diện: 1 diện rỗng, 6 diện một chiều, 4 diện hai chiều, và 1 diện ba chiều. Hình trụ và hình nón trong $\mathbb{R}^3$ đều là những tập lồi có vô số diện.

Cho $c \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ bất kỳ. Khi đó, tập nghiệm của bài toán quy hoạch lồi $\min\{\langle c, x\rangle \,:\, x \in D\}$ là một diện của D.

Có một lớp tập lồi quan trọng có hữu hạn diện, đó là các tập lồi đa diện. Nói một cách đơn giản, tập lồi đa diện là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức và đẳng thức tuyến tính. Các tập hợp này có nhiều ứng dụng trong các lý thuyết toán học, đặc biệt là trong quy hoạch tuyến tính.

TẬP LỒI ĐA DIỆN TRONG CÁC KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU

Tập lồi đa diện (a polyhedral convex set) trong $\mathbb{R}^n$ là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng của $\mathbb{R}^n$. Như vậy, tập con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đa diện khi và chỉ khi nó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính

$$\langle a_i, x\rangle \le \alpha_i \quad (i \in I), \tag{1}$$

với I là một tập chỉ số hữu hạn, $a_i \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i \in I$. Nếu $I = \emptyset$, thì ta quy ước rằng $D = \mathbb{R}^n$. Nếu $I = \{1\}$, $a_i = 0$ và $\alpha_i \ge 0$, thì tập D được cho bởi (1) cũng là toàn bộ không gian. Lưu ý rằng, với $n \ge 1$, tập hợp $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle a_i, x\rangle \le \alpha_i\}$ là một nửa không gian đóng của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $a_i \neq 0$. Vì mỗi đẳng thức $\langle a_i, x\rangle = \alpha_i$ là tương đương với một hệ hai bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leq \alpha_i$ và $\langle -a_i, x\rangle \leq -\alpha_i$, nên thay cho (1) ta có thể xét một hệ hỗn hợp các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính. Nói cách khác, *một tập con của một không gian Euclid là tập lồi đa diện khi và chỉ khi nó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức và đẳng thức tuyến tính.* Dễ thấy rằng tập hợp rỗng cũng là tập lồi đa diện. Ngoài ra, với quy ước rằng giao của một họ rỗng các nửa không gian đóng là toàn không gian, *một tập con của một không gian Euclid là tập lồi đa diện khi và chỉ khi nó là giao của một họ hữu hạn các nửa không gian đóng.*

Hình tam giác trong $\mathbb{R}^2$ và khối tứ diện trong $\mathbb{R}^3$ là các tập lồi đa diện. Trong khi đó, hình trụ và hình nón trong $\mathbb{R}^3$ không là các tập lồi đa diện. Khẳng định cuối suy ra từ định lý sau đây.

Tính chất đặc trưng của các tập lồi đa diện *Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Khi đó, D là tập lồi đa diện khi và chỉ khi nó có hữu hạn diện.*

Đối với mỗi tập lồi đa diện $D \subseteq \mathbb{R}^n$ cho trước, tồn tại một số hữu hạn các điểm và một số hữu hạn các hướng sao cho D là tổng của bao lồi của các điểm đó và nón lồi sinh ra bởi các hướng đó. Điều ngược lại cũng đúng. Kết quả nổi tiếng này được coi là thuộc về H. Minkowski (1910) và H. Weyl (1935).

Định lý biểu diễn các tập lồi đa diện *Tập hợp $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đa diện khi và chỉ khi nó là hữu hạn sinh* (finitely generated), *tức là D có thể biểu diễn được dưới dạng*

$$D = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j v_j \ : \ \lambda_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, k, \\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \ \mu_j \geq 0,\ \forall j = 1, \ldots, \ell \Big\}, \tag{2}$$

ở đó $u_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$, và $v_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, \ell$.

Ta sẽ có biểu diễn (2) cho tập lồi đa diện

$$D = \big\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \big\}$$

nếu chọn $u_1 = (3,0), u_2 = (0,\frac{3}{2}), v_1 = (1,0)$ và $v_2 = (0,1)$.

TẬP LỒI ĐA DIỆN SUY RỘNG

Cho X là một không gian tô pô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff với không gian đối ngẫu được ký hiệu bởi X^*. Ta nói rằng $D \subseteq X$ là một *tập lồi đa diện suy rộng* (a generalized polyhedral convex set) nếu tồn tại $x_i^* \in X^*$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, và một không gian con đóng $L \subseteq X$, sao cho

$$D = \{x \in X \ : \ x \in L, \ \langle x_i^*, x\rangle \le \alpha_i, \ \ i = 1, \ldots, p\}.$$

Nếu D có biểu diễn cuối với $L = X$, thì nó được gọi là một *tập lồi đa diện* (a polyhedral convex set). Tập lồi đa diện suy rộng luôn là tập đóng. Nếu $D \subseteq X$ là một tập lồi đa diện suy rộng, thì phần trong tương đối $\mathrm{ri}\, D$ của D là khác rỗng. Nhiều kết quả về các tập lồi đa diện trong các không gian hữu hạn chiều có thể mở rộng cho các tập lồi đa diện suy rộng và các tập lồi đa diện trong các không gian vô hạn chiều.

NGUYỄN ĐÔNG YÊN

Tài liệu tham khảo

1. J. F. Bonnans, A. Shapiro, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer, New York, 2000.
2. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.