DIỆN TÍCH (area)

Đại lượng số gắn với một lớp các hình trong mặt phẳng, biểu thị độ lớn của hình, thỏa mãn các tính chất sau:

a) Diện tích là số không âm;

b) Nếu hình A được cắt thành hai hình B và C thì diện tích của hình A bằng diện tích của hình B cộng với diện tích của hình C;

c) Diện tích của một hình không thay đổi qua phép rời hình;

d) Diện tích của hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 là 1.

Khái niệm diện tích cũng được mở rộng cho những mặt hai chiều trong không gian ba chiều.

Về mặt lịch sử, đầu tiên người ta tính toán diện tích của hình đa giác. Ta có thể chứng minh được rằng tồn tại và duy nhất hàm diện tích cho lớp gồm các hình đa giác. Sau này lớp hình rộng hơn, gồm các hình đo được Jordan, cũng được tìm hiểu nghiên cứu. Một hình M trong mặt phẳng là đo được Jordan nếu với mọi số $\epsilon > 0$, tồn tại hai đa giác P và Q sao cho $P \subseteq M \subset Q$ và diện tích của Q trừ diện tích của P nhỏ hơn ϵ. Chẳng hạn, hình tròn là một hình đo được Jordan. Lớp hình đo được Jordan rất phong phú, nó chứa tất cả các hình bị chặn với biên gồm hữu hạn đường cong trơn. Trong lớp các hình đo được Jordan, hàm diện tích tồn tại và duy nhất.

Thời cổ đại, người ta công nhận sự tồn tại khái niệm diện tích thỏa mãn bốn tính chất trên. Họ tập trung vào cách tính diện tích. Người cổ đại đã biết cách tính diện tích hình đa giác, diện tích hình tròn và một số hình khác. Họ sử dụng phương pháp vét cạn (method of exhaustion) để tính diện tích hình phức tạp, với ý tưởng chính là xấp xỉ hình này bởi các hình đa giác. Trong một số trường hợp, họ sử dụng nguyên lý Cavalieri để tính diện tích. Nguyên lý này cho diện tích của hình, phát biểu rằng: *Giả sử hai hình trong mặt phẳng được giới hạn bởi hai đường thẳng song song. Nếu mọi đường thẳng song song với đường thẳng này cắt hai hình đã cho theo những đoạn có độ dài bằng nhau thì diện tích của hai hình đã cho là bằng nhau.*

Sự ra đời của phép tính tích phân cho ta công cụ để tính diện tích của những hình phức tạp hơn.

Những cố gắng mở rộng khái niệm diện tích cho những hình tổng quát hơn đến lý thuyết độ đo.

DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Vào thế kỷ thứ 5 TCN, Hippocrates xứ Chios (Hippocrates of Chios) là người đầu tiên chỉ ra rằng diện tích của hình tròn tỉ lệ với bình phương bán kính của nó, nhưng không xác định được hằng số tỉ lệ, hằng số π. Eudoxus xứ Cnidus, vào thế kỷ thứ 5 TCN, cũng tìm ra kết quả trên [1].

Sau đó, nhà toán học Archimedes sử dụng công cụ của hình học Euclid để chứng minh rằng diện tích của hình tròn bằng với diện tích của tam giác vuông có đáy bằng chu vi của đường tròn và có chiều cao bằng với bán kính của vòng tròn. (Chu vi của đường tròn bán kính r là $2\pi r$, và ta nhận được diện tích của hình tròn bán kính là πr^2.) Archimedes đã tính gần đúng giá trị của π bằng phương pháp nhân đôi của mình. Ông xét tam giác đều nội tiếp trong đường tròn và tính diện tích của tam giác này, sau đó ông nhân đôi số cạnh để tạo ra một hình lục giác đều, sau đó tiếp tục nhân đôi số cạnh. Khi đó diện tích của đa giác đều ngày càng gần với diện tích của hình tròn. Ông thực hiện việc tương tự với đa giác ngoại tiếp ngoại tiếp đường tròn.

CÔNG THỨC HERON TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Heron xứ Alexandria (Heron of Alexandria) tìm ra công thức tính diện tích tam giác theo các cạnh của nó, vào năm 60. Công thức này phát biểu rằng diện tích S của tam giác có các cạnh a, b và c bằng

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ở đây $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác.

CÔNG THỨC BRAHMAGUPTA TÍNH DIỆN TÍCH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Vào thế kỷ thứ VII, Brahmapupta tìm ra công thức tính diện tích của tứ giác nội tiếp đường tròn theo các cạnh của nó. Công thức này phát biểu rằng diện tích S của tứ giác nội tiếp với các cạnh a, b, c và d bằng

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

ở đây $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ là nửa chu vi của tứ giác nội tiếp.

Năm 1841, hai nhà toán học người Đức Carl Anton Bretschneider và Christian von Staudt một cách độc lập đã đưa ra công thức tính diện tích của một tứ giác tùy ý. Công thức này phát biểu rằng diện tích S của tứ giác cạnh a, b, c và d bằng

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})},$$

ở đây $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ là nửa chu vi của tứ giác và α và γ là hai cặp góc đối diện.

NGUYỄN DUY TÂN

Tài liệu tham khảo

1. E. E. Moise, *Elementary geometry from an advanced standpoint* (3rd ed.), Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1990.
2. K. R. Sastry, *Brahmagupta quadrilaterals*, Forum Geom. 2, 2002, 167–173.
3. J. Stewart, *Calculus early transcendentals* (8th ed.), Brook/Cole., Toronto, Ontario, 2014.