

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG (optimal control problems involving ordinary differential equations)

Để có một ví dụ cụ thể về bài toán điều khiển tối ưu, chúng ta xét *bài toán tiêu dùng tối ưu* (optimal consumption). Ký hiệu $x(t) \geq 0$ là *vốn* (capital) của một nền kinh tế ở thời điểm t . Lượng vốn $x(t)$ này được chia làm hai phần: $u(t)x(t)$, với $u(t) \in [0, 1]$, là *phần vốn được sử dụng để đầu tư phát triển*, và $(1 - u(t))x(t)$ là *phần vốn được sử dụng để tiêu dùng*. Giả sử rằng *vốn ban đầu* là $x_0 > 0$ và lượng tái đầu tư tỉ lệ thuận với tốc độ tăng trưởng vốn theo hệ số k . Khi đó, ta có phương trình

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ku(t)x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Phần tiêu dùng đưa đến *sự thỏa mãn tiêu dùng* (consumption satisfaction), tính sau một khoảng thời gian đầu tư $[0, T]$, được cho bởi công thức

$$J_T(x, u) = \int_0^T [(1 - u(t))x(t)]^\alpha dt + ax^\alpha(T), \quad (2)$$

ở đó $\alpha > 0$ và $a > 0$ là các hệ số phụ thuộc vào từng xã hội. Bài toán đặt ra cho nhà quản lý là tìm hàm điều khiển chấp nhận được $u(\cdot)$ sao cho cùng với hàm $x(\cdot)$ tìm được từ việc giải *bài toán giá trị ban đầu* cho phương trình vi phân tuyến tính (1), phiếm hàm $J_T(x, u)$ trong (2) đạt giá trị lớn nhất. Mỗi cặp hàm (x, u) như vậy được gọi là một *nghiệm* của bài toán được xét.

Nếu hàm điều khiển chấp nhận được $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) \in [0, 1]$ với mọi $t \in [0, T]$, được chọn là hàm liên tục, thì hệ (1) có nghiệm duy nhất $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, và nghiệm đó là hàm khả vi Fréchet liên tục. Do đó, tích phân ở (2) là *tích phân Riemann*. Tuy thế, nếu hàm điều khiển được lấy từ tập hợp các hàm liên tục, hay từ tập hợp các hàm liên tục từng khúc, thì có nhiều bài toán điều khiển tối ưu không có nghiệm. Trong lý thuyết điều khiển tối ưu, người ta đã nhận thấy rằng tập hợp *các hàm đo được*

theo Lebesgue (Lebesgue measurable functions) là tập hợp các hàm điều khiển thích hợp nhất. Một hàm số $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là đo được theo Lebesgue nếu ảnh ngược của mỗi nửa đường thẳng mở $(-\infty, \gamma)$, với $\gamma \in \mathbb{R}$ được lấy tùy ý, là *tập hợp đo được* theo độ đo Lebesgue trên $[0, T]$. Tức là, với mỗi $\gamma \in \mathbb{R}$, tập hợp $\{t \in [0, T] : u(t) \in (-\infty, \gamma)\}$ là đo được theo Lebesgue. Mỗi hàm u như vậy chỉ cần được xác định trên một *tập có độ đo đủ* (a set of full measure) của $[0, T]$. Nói cách khác, hai hàm đo được u^1 và u^2 từ $[0, T]$ vào \mathbb{R} được coi là trùng nhau nếu $u^1(t) = u^2(t)$ *hầu khắp* (viết tắt là h.k.) trên $[0, T]$. Điều đó cũng có nghĩa là tập hợp $\{t \in [0, T] : u^1(t) \neq u^2(t)\}$ có độ đo 0. Nếu u là đo được, thì có tồn tại duy nhất một hàm *liên tục tuyệt đối* $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ là nghiệm của (1). Vì hàm liên tục tuyệt đối chỉ có đạo hàm Fréchet hầu khắp nơi và vì $u(t)$ cũng chỉ xác định với h.k. $t \in [0, T]$, nên hệ (1) được viết thành

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ku(t)x(t), & \text{h.k. } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

và tích phân ở (2) được hiểu là *tích phân Lebesgue*. Trong bài toán đang xét, vì hàm u là đo được, giới nội, và hàm x là liên tục tuyệt đối, nên hàm dưới dấu tích phân là khả tích; do đó $J_T(x, u)$ là một số thực.

Các khái niệm từ giải tích hàm, như *độ đo Lebesgue*, *hàm đo được theo Lebesgue*, *tích phân Lebesgue*, *hàm liên tục tuyệt đối*, *công thức Newton-Leibnitz cho các hàm liên tục tuyệt đối*, *hàm có biến phân giới nội*, *σ -đại số Borel*, *hàm đo được theo Borel*, *tích phân Lebesgue-Stieltjes...*, và các kết quả của giải tích hàm như Định lý Riesz mô tả không gian đối ngẫu của không gian các hàm liên tục, đóng vai trò quan trọng lý thuyết điều khiển tối ưu.

Có thể phát biểu bài toán điều khiển tối ưu ở nhiều dạng khác nhau. Dưới đây chúng ta xét bài toán dạng Mayer.

Đối với một đoạn $[t_0, T]$ cho trước của đường thẳng thực, ta ký hiệu σ -đại số các tập con đo được Lebesgue của nó (t.ư., σ -đại số các tập con đo được theo Borel của nó) bởi \mathcal{L} (t.ư., \mathcal{B}). Không gian Sobolev $W^{1,1}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$

là không gian tuyến tính của các hàm liên tục tuyệt đối $x: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ được trang bị chuẩn $\|x\|_{W^{1,1}} = \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^T \|\dot{x}(t)\| dt$.

Xét bài toán điều khiển tối ưu thời gian hữu hạn dạng Mayer, được ký hiệu bởi \mathcal{M} ,

$$\text{Tìm cực tiểu } g(x(t_0), x(T)) \quad (3)$$

theo $x \in W^{1,1}([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ và các hàm đo được theo Lebesgue $u: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \text{h.k. } t \in [t_0, T], \\ (x(t_0), x(T)) \in C, \\ u(t) \in U(t), & \text{h.k. } t \in [t_0, T], \\ h(t, x(t)) \leq 0, & \forall t \in [t_0, T], \end{cases} \quad (4)$$

ở đó $[t_0, T]$ là khoảng số thực cho trước, $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, và $h: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm đã cho, $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ là tập đóng, và $U: [t_0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị.

Một hàm đo được theo Lebesgue $u: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ thỏa mãn $u(t) \in U(t)$ h.k. $t \in [t_0, T]$ được gọi là *hàm điều khiển* (control function). Một *quá trình* (x, u) (process) bao gồm một hàm điều khiển u và một hàm $x \in W^{1,1}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ là nghiệm của phương trình vi phân trong (4). Một *quỹ đạo trạng thái* (state trajectory) x là thành phần thứ nhất của một quá trình (x, u) nào đó. Một quá trình (x, u) được gọi là *chấp nhận được* (feasible) nếu quỹ đạo trạng thái thỏa mãn *ràng buộc đầu mút* (endpoint constraint) $(x(t_0), x(T)) \in C$ và *ràng buộc trạng thái* (state constraint) $h(t, x(t)) \leq 0$ với mọi $t \in [t_0, T]$.

Do có sự tham gia của ràng buộc trạng thái, bài toán \mathcal{M} trong (3)–(4) được gọi là *bài toán điều khiển tối ưu với ràng buộc trạng thái*. Nhưng nếu bất đẳng thức $h(t, x(t)) \leq 0$ được thỏa mãn với mọi $(t, x(t))$ mà $t \in [t_0, T]$ và $x \in W^{1,1}([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ (ví dụ như khi h là hàm hằng nhận một giá trị không dương cố định), nghĩa là điều kiện $h(t, x(t)) \leq 0$ với mọi $t \in [t_0, T]$

có thể bỏ ra khỏi (4), thì người ta nói rằng \mathcal{M} là một *bài toán điều khiển tối ưu không có ràng buộc trạng thái*.

Một quá trình chấp nhận được (\bar{x}, \bar{u}) được gọi là một *nghiệm địa phương* $W^{1,1}$ (a $W^{1,1}$ local minimizer) của \mathcal{M} nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$g(\bar{x}(t_0), \bar{x}(T)) \leq g(x(t_0), x(T)),$$

với mọi quá trình chấp nhận được (x, u) thỏa mãn $\|\bar{x} - x\|_{W^{1,1}} \leq \delta$. Một quá trình chấp nhận được (\bar{x}, \bar{u}) được gọi là một *nghiệm toàn cục* $W^{1,1}$ (a $W^{1,1}$ global minimizer) của \mathcal{M} nếu, với mọi quá trình chấp nhận được (x, u) , ta có $g(\bar{x}(t_0), \bar{x}(T)) \leq g(x(t_0), x(T))$.

Nếu trong (3) thay cho $g(x(t_0), x(T))$ là

$$\int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t))dt + g(x(t_0), x(T))$$

(t.ư., $\int_{t_0}^T F(x(t), u(t), t)dt$), ở đó $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số cho trước, thì (3)–(4) được gọi là *bài toán điều khiển tối ưu thời gian hữu hạn dạng Bolza* (t.ư., *bài toán điều khiển tối ưu thời gian hữu hạn dạng Lagrange*). Ở đây, $\int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t))dt$ ký hiệu tích phân Lebesgue của hàm số thực $t \mapsto F(t, x(t), u(t))$ trên đoạn $[t_0, T]$.

Các định lý tồn tại nghiệm trong lý thuyết điều khiển tối ưu đưa ra các điều kiện thích hợp đảm bảo sự tồn tại nghiệm toàn cục của bài toán được xét.

Các nguyên lý cực đại trong lý thuyết điều khiển tối ưu - là những định lý toán học quan trọng mà những phiên bản đầu tiên đã được L. S. Pontryagin và các cộng sự phát biểu và chứng minh - chỉ ra các điều kiện cần mà một nghiệm địa phương phải thỏa mãn. Đối với một số lớp bài toán điều khiển tối ưu, bằng cách kết hợp một định lý tồn tại nghiệm với một nguyên lý

cực đại thích hợp, đồng thời khai thác cấu trúc đặc biệt của bài toán được xét, người ta có thể xác định được tập nghiệm địa phương và tìm được tập nghiệm toàn cục của bài toán. Còn nói chung, bài toán điều khiển tối ưu không giải được dưới dạng hiển. Khi đó, người ta sử dụng các thuật toán để giải số bài toán đã cho.

Nguyên lý quy hoạch động của R. Bellman chỉ ra điều kiện cần mà nghiệm toàn cục của bài toán điều khiển tối ưu phải thỏa mãn. Dưới một số điều kiện, nguyên lý này cho phép giải bài toán thông qua một phương trình đạo hàm riêng mà ngày nay thường được gọi là phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman.

Đôi khi, người ta kết hợp cả nguyên lý cực đại và nguyên lý quy hoạch động trong việc nghiên cứu lý thuyết hoặc giải hiển bài toán điều khiển tối ưu đã cho.

Lý thuyết điều khiển tối ưu, Nguyên lý cực đại, Nguyên lý quy hoạch động được trình bày trong những mục riêng. Ở đây chúng ta chỉ lưu ý rằng thuyết điều khiển tối ưu có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong kỹ thuật (thiết kế tối ưu, robot học,...), khoa học không gian, khoa học quản lý (điều khiển tối ưu các hồ chứa và nhà máy thủy điện,...), và kinh tế.

NGUYỄN ĐÔNG YÊN

Tài liệu tham khảo

1. R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
2. L. Cesari, *Optimization Theory and Applications*, 1st edition. Springer-Verlag, New York, 1983.
3. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
4. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York-London, 1962.
5. R. Vinter, *Optimal Control*, Birkhäuser, Boston, 2000.
6. J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1992.