ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY MANGASARIAN-FROMOVITZ (the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification)

Điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz (the Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification [Điều khiện chuẩn hóa ràng buộc Mangasarian-Fromovitz]), viết tắt là (MFCQ) có nguồn gốc từ bài báo của Mangasarian và Fromovitz (1967). Mục này giới thiệu điều kiện (MFCQ) một cách đầy đủ hơn phần trình bày vắn tắt trong mục "Phân loại các bài toán quy hoạch toán học".

Giả sử X là không gian Banach bất kỳ (có thể lấy $X = \mathbb{R}^n$), $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g_i\colon X \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ và $h_j\colon X \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, s)$ là các hàm trơn C^1 - tức là các hàm khả vi Fréchet tại mọi điểm của X và các ánh xạ đạo hàm là liên tục ở trên X. Xét *bài toán quy hoạch toán học trơn*

$$\min\{f(x) \ : \ x \in D\}, \tag{1}$$

ở đó tập ràng buộc D được cho bởi công thức

$$D = \{x \in X \ : \ g_1(x) \le 0, \ldots, g_m(x) \le 0, \ h_1(x) = 0, \ldots, h_s(x) = 0\}. \tag{2}$$

Quy tắc nhân tử dạng Fritz John cho bài toán quy hoạch trơn. *Giả sử rằng $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của* (1)*, ở đó D được cho bởi công thức* (2)*. Khi đó, tồn tại các nhân tử $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_m \ge 0$, $\mu_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \mu_s \in \mathbb{R}$, không đồng thời bằng 0, sao cho $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, m$, và*

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0. \tag{3}$$

Nếu trong (3) mà ta có $\lambda_0 = 0$, thì hàm mục tiêu f của (1) hoàn toàn không tham gia vào việc xác định điểm nghi ngờ cực trị $\bar{x}$. Để chắc chắc chắn có $\lambda_0 > 0$, người ta đưa ra điều kiện chuẩn hóa ràng buộc sau đây.

Điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz (viết tắt: (MFCQ)). Ta nói rằng hệ ràng buộc

$$g_1(x) \le 0, \ldots, g_m(x) \le 0, \ h_1(x) = 0, \ldots, h_s(x) = 0, \tag{4}$$

thỏa mãn điều kiện (MFCQ) tại $\bar{x} \in D$ nếu

$$\begin{cases} \text{Các véc tơ } \{\nabla h_j(\bar{x}) \, : \, j = 1, \ldots, s\} \text{ là độc lập tuyến tính,} \\ \text{và tồn tại } v \in X \text{ sao cho } \langle \nabla h_j(\bar{x}), v \rangle = 0, \\ \text{với mỗi } j = 1, \ldots, s, \text{ và } \langle \nabla g_i(\bar{x}), v \rangle < 0, \\ \text{với mỗi } i = 1, \ldots, m \text{ mà } g_i(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán quy hoạch trơn cho bài toán quy hoạch trơn. *Giả sử rằng $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của* (1)*, ở đó D được cho bởi công thức* (2)*. Khi đó, nếu hệ ràng buộc* (4) *thỏa mãn điều kiện* (MFCQ) *tại $\bar{x} \in D$, thì tồn tại các nhân tử $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \mu_s \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, m$, và*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0. \tag{5}$$

Quy tắc nhân tử Lagrange này là hệ quả của Quy tắc nhân tử dạng Fritz John vì, dưới điều kiện (MFCQ), trong (3) ta có $\lambda_0 > 0$ (khi đó, bằng cách chia hai vế của (3) cho λ_0, có thể coi $\lambda_0 = 1$).

Để từ Quy tắc nhân tử dạng Fritz John rút ra $\lambda_0 > 0$, người ta có thể sử dụng *Điều kiện chính quy Abadie* - là một điều kiện yếu hơn (MFCQ).

Nếu các hàm trong (1) và (2) chỉ được giả thiết là Lipschitz địa phương, thì thay cho (MFCQ) ta có thể xét *điều kiện chính quy ở dạng dưới vi phân qua giới hạn*. Điều kiện này chẳng những có ích trong việc thiết lập Quy tắc nhân tử Lagrange, mà còn là cơ sở để nghiên cứu *tính ổn định* (stability) và *tính yên tĩnh* (calmness) của các bài toán quy hoạch không trơn phụ thuộc tham số. Chúng ta lưu ý rằng điều kiện chính quy ở dạng dưới vi phân qua giới hạn là nhẹ hơn *điều kiện chính quy ở dạng dưới vi phân Clarke*.

Quay lại hệ phương trình và bất phương trình trong (4), nếu đặt

$$G(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x), h_1(x), \ldots, h_s(x)) \quad \forall x \in X,$$

thì ta có hàm véc tơ $G\colon X \to \mathbb{R}^{m+s}$ thuộc lớp C^1. Đạo hàm Fréchet của G tại x được ký hiệu bởi $G'(x)$. Với $K := \mathbb{R}^m_+ \times \{0_{\mathbb{R}^s}\}$, thấy rằng K là nón lồi đóng (hơn thế, K còn là nón lồi đa diện, vì nó là giao của một họ hữu hạn các nửa không gian đóng). Tập D trong (4) có thể biểu diễn dưới dạng

$$D = \{x \in X \,:\, G(x) \leq_K 0\}\,, \tag{6}$$

ở đó bất đẳng thức $y^1 \leq_K y^2$ giữa hai véc tơ y^1, y^2 có nghĩa là $y^2 - y^1 \in K$. Điều kiện (MFCQ) là tương đương với điều kiện sau đây

$$0 \in \operatorname{int}\,[G(\bar{x}) + G'(\bar{x})(X) + K], \tag{7}$$

ở đó $\operatorname{int}\Omega$ ký hiệu phần trong của Ω. Tổng quát hơn, với Y là một không gian Banach (có thể lấy $X = \mathbb{R}^p$), $K \subset Y$ là nón lồi đóng, $C \subset X$ là một tập lồi đóng khác rỗng, và $G\colon X \to Y$ là hàm véc tơ thuộc lớp C^1 cho trước, ta có thể xét *hệ bất đẳng thức suy rộng*

$$G(x) \leq_K 0, \;\; x \in C, \tag{8}$$

ở đó $y^1 \leq_K y^2$ có nghĩa là $y^2 - y^1 \in K$, và ký hiệu tập nghiệm của nó bởi D. Với mỗi $\bar{x} \in D$, ta nói rằng hệ bất đẳng thức suy rộng (8) thỏa mãn *Điều kiện chính quy Robinson* (Robinson's constraint qualification condition) tại $\bar{x}$ nếu

$$0 \in \operatorname{int}\,[G(\bar{x}) + G'(\bar{x})(C - \bar{x}) + K]. \tag{9}$$

Dễ thấy rằng hệ bất đẳng thức trong (6) là trường hợp riêng của (8) và điều kiện (7) là trường hợp đặc biệt của (9), khi mà ta có $C = X$. Điều kiện chính quy Robinson đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu.

NGUYỄN ĐÔNG YÊN

Tài liệu tham khảo

1. F. H. Clarke, *A new approach to Lagrange multipliers*, Math. Oper. Res. 1 (1976), 165–174.
2. F. Facchinei, J.-S. Pang, *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Vols. I & II*, Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.
3. O. L. Mangasarian, S. Fromovitz, *The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints*, J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), 37–47.
4. S. M. Robinson, *Stability theory for systems of inequalities. II. Differentiable nonlinear systems*, SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 497–513.
5. A. Ruszczyński, *Nonlinear Optimization*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2006.