ĐỊNH GIÁ (valuation)

(Xem thêm *Chuẩn trên một trường*.)

Định giá là một ánh xạ $v\colon K \to \Gamma_\infty := \Gamma \cup \{\infty\}$ từ một trường K, vào một nhóm Aben hoàn toàn được sắp Γ (ký hiệu theo lối cộng tính) với phần tử bổ sung ∞ được coi là lớn hơn bất kỳ phần tử nào của Γ, thỏa mãn $\infty + x = x + \infty = \infty + \infty = \infty$ với mọi $x \in \Gamma$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $v(0) = \infty, v(x) \neq \infty, \forall x \neq 0$;

(2) $v(ab) = v(a) + v(b)$;

(3) $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$.

Ảnh của $K^* = K \setminus \{0\}$ là một nhóm con được gọi là *nhóm giá trị của định giá* v. Tiếp theo ta luôn giả sử rằng $v(K^*) = \Gamma$.

Với cùng các tiên đề trên, người ta định nghĩa định giá lôgarít của các trường. Mỗi trường với chuẩn phi Acsimét (xem *Chuẩn trên một trường*) có thể biến thành một trường với định giá lôgarít nếu ta đổi ký hiệu phép toán nhóm trong nhóm giá trị Γ từ phép nhân sang phép cộng và đảo ngược thứ tự. Phần tử 0 lúc đó được biểu thị bằng ∞. Ngược lại, ta có thể chuyển đổi ngược lại từ một trường với một định giá lôgarit sang một trường với một chuẩn phi Acsimét. Nếu ta có một chuẩn thực phi Acsimét, ta có phép chuyển tương ứng bằng cách thay thế mỗi số thực dương a bằng $\log(a)$. Định giá logarit tương ứng được gọi là định giá thực.

Hai định giá $v_i\colon K \to \Gamma_{i,\infty}, i = 1, 2$, là tương đương nếu có một đẳng cấu các nhóm có thứ tự $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, sao cho với mọi $x \in K^*$, ta có $\phi(v_1(x)) = v_2(x)$.

Tập hợp tất cả các phần tử $x \in K$ sao cho $v(x) \geq 0$ lập nên một vành con A của K, được gọi là vành định giá của v trong K. Đây là một *vành địa phương*. Các phần tử $x \in A$ sao cho $v(x) > 0$ lập nên một iđêan cực đại m_v, gọi là *iđêan định giá của* v. Vành thương A/m_v là một trường, gọi là *trường thặng dư của định giá* v.

Hai định giá trị trên một trường K là tương đương khi và chỉ khi các vành định giá của chúng, coi như là vành con của K, là bằng nhau. Vì vậy, biết tất cả các định giá của một trường (đến mức tương đương) là tương đương với việc biết tất cả các vành định giá trong trường K. Một vành con A của K là một vành định giá nếu và chỉ khi đối với mỗi phần tử $x \neq 0$, hoặc $x \in A$, hoặc $x^{-1} \in A$.

Như vậy, một vành định giá có thể được định nghĩa một cách trừu tượng như là một miền nguyên thỏa mãn điều kiện vừa nêu liên quan đến trường các phân thức của nó. Mỗi vành A như vậy là vành định giá của định giá kinh điển đối với trường các thương K của nó, với nhóm giá trị là K^*/A^*, mà thứ tự ở đây được cho bởi tính chia hết (xem [1], [2]).

NGUYỄN QUỐC THẮNG

Tài liệu tham khảo

1. N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.
2. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.