

HÀM LIÊN TỤC (continuous function)

Đây là một khái niệm cơ bản của giải tích toán học. Cho f là hàm nhận giá trị thực xác định trên $D \subseteq \mathbb{R}$, tức là $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó ta nói f liên tục tại điểm $x_0 \in D$, hay liên tục tại điểm x_0 trên tập hợp D nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$ ta có bất đẳng thức

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nếu ký hiệu $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và $V(f(x_0), \varepsilon) := (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ là δ -lân cận và ε -lân cận tương ứng của x_0 và $f(x_0)$, thì định nghĩa trên có thể được diễn đạt lại như sau: f liên tục tại điểm $x_0 \in D$ nếu với mọi ε -lân cận $V = V(f(x_0), \varepsilon)$ của $f(x_0)$ tồn tại một δ -lân cận $U = U(x_0, \delta)$ của x_0 sao cho $f(U \cap D) \subseteq V$.

Sử dụng khái niệm giới hạn ta có thể nói f liên tục tại điểm x_0 trên tập hợp D nếu giới hạn của nó trên D tại điểm x_0 tồn tại và bằng $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x) = f(x_0).$$

Bằng ngôn ngữ giới hạn của một chuỗi, sự liên tục của f tại điểm x_0 có thể được định nghĩa: f liên tục tại điểm x_0 trên tập hợp D nếu đối với mọi chuỗi các điểm $x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$, sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Ba định nghĩa hàm liên tục tại một điểm trên đây là tương đương.

Nếu f liên tục tại x_0 trên tập hợp $D \cap \{x : x \geq x_0\}$ (hay $D \cap \{x : x \leq x_0\}$), khi đó ta nói f liên tục phải (hay trái) tại x_0 .

Tất cả các hàm sơ cấp cơ sở đều liên tục tại tất cả các điểm thuộc miền xác định của chúng. Một tính chất quan trọng của hàm liên tục là tập hợp các hàm liên tục đóng đối với các phép tính số học và đối với hợp của các hàm. Chi tiết hơn, nếu hai hàm nhận giá trị thực $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại điểm $x_0 \in D$, khi đó tổng $f + g$, hiệu $f - g$, tích fg và thương f/g với $g(x_0) \neq 0$ cũng liên tục tại điểm $x_0 \in D$. Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ sao cho $\varphi(E) \subseteq D$ và hàm hợp $f \circ \varphi$ có nghĩa, nếu tồn

tại một điểm $y_0 \in E$ sao cho $\varphi(y_0) = x_0$ và nếu φ liên tục tại $y_0 \in E$, khi đó $f \circ \varphi$ cũng liên tục tại $y_0 \in E$. Trong trường hợp này, ta có

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(\varphi(y)) = f\left(\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)\right) = f(\varphi(y_0)).$$

Từ những tính chất này của hàm liên tục ta suy ra là không những chỉ hàm sơ cấp cơ sở liên tục, mà tất cả các hàm sơ cấp cũng liên tục trên miền xác định của chúng. Tính liên tục cũng được bảo tồn đối với sự chuyển đổi giới hạn đều: nếu chuỗi hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều trên tập D và nếu mọi hàm f_n liên tục tại $x_0 \in D$, $n = 1, 2, \dots$, khi đó

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

liên tục tại $x_0 \in D$.

Nếu hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại mọi điểm của D , thì ta nói f liên tục trên D . Nếu $x_0 \in E \subseteq D$ và f liên tục tại $x_0 \in D$, khi đó thu hẹp của f trên E cũng liên tục tại $x_0 \in E$. Nói chung, điều ngược lại không đúng. Ví dụ, hàm Dirichlet liên tục trên tập hợp số hữu tỷ và trên tập hợp số vô tỷ nhưng bản thân hàm này lại gián đoạn tại tất cả các điểm của đường thẳng thực.

Một lớp hàm liên tục quan trọng là lớp các hàm liên tục trên một khoảng. Chúng có tính chất sau đây.

Định lý Weierstrass thứ nhất: Nếu một hàm liên tục trên một khoảng đóng, thì nó bị chặn trên khoảng này.

Định lý Weierstrass thứ hai: Nếu một hàm liên tục trên một khoảng đóng, thì nó nhận giá trị lớn nhất và bé nhất trên khoảng này.

Định lý Cauchy về giá trị trung gian: Nếu một hàm liên tục trên một khoảng đóng, thì nó nhận bất kỳ giá trị nào ở giữa hai giá trị tại điểm đầu và điểm cuối của khoảng này.

Định lý về hàm ngược: Nếu một hàm liên tục và đơn điệu chặt trên một khoảng, thì nó có hàm ngược đơn trị cũng xác định trên một khoảng, đơn điệu chặt và liên tục trên khoảng này.

Định lý Cantor về tính liên tục đều: Nếu một hàm liên tục trên một khoảng đóng, thì nó liên tục đều trên khoảng này.

Một hàm liên tục trên một khoảng đóng có thể được xấp xỉ đều với độ chính xác tùy ý bằng một đa thức đại số. Một hàm liên tục f trên $[0, 2\pi]$ sao cho $f(0) = f(2\pi)$ có thể được xấp xỉ đều với độ chính xác tùy ý bằng một đa thức lượng giác (xem Định lý Weirstrass về xấp xỉ hàm số).

Khái niệm hàm liên tục có thể được tổng quát cho hàm nhiều biến. Định nghĩa trên có thể giữ nguyên một cách hình thức nếu ta xem D như là một tập con của không gian Euclid d -chiều \mathbb{R}^d , $|x - x_0|$ như là khoảng cách giữa hai điểm $x \in D$ và $x_0 \in D$, $U(x_0, \delta)$ như là δ -lân cận của $x_0 \in \mathbb{R}^d$, và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ như là giới hạn của một chuỗi các điểm trên \mathbb{R}^d . Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$, phụ thuộc vào các biến x_1, \dots, x_d liên tục tại điểm $y = (y_1, \dots, y_d)$ còn được gọi là liên tục chung tại điểm y theo các biến x_1, \dots, x_d , để phân biệt với hàm liên tục theo từng biến riêng rẽ. Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$, được gọi là liên tục theo biến x_1 tại điểm y nếu thu hẹp của f trên tập hợp

$$D \cap \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_2 = y_2, \dots, x_d = y_d\}$$

liên tục tại điểm y_1 như là hàm một biến phụ thuộc vào x_1 . Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, có thể liên tục tại một điểm theo từng biến x_1, \dots, x_d riêng biệt nhưng không nhất thiết phải liên tục chung tại điểm này.

Định nghĩa hàm liên tục có thể mở rộng trực tiếp cho hàm nhận giá trị phức. Ta chỉ cần xem $|f(x) - f(x_0)|$ trong định nghĩa như là chuẩn của số phức $f(x) - f(x_0)$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ như là giới hạn trên mặt phẳng phức. Tất cả các định nghĩa này là trường hợp đặc biệt của khái niệm tổng quát hơn của hàm liên tục với miền xác định là một không gian tô pô và nhận giá trị trên một không gian tô pô khác (xem Ánh xạ liên tục).

ĐINH DŨNG

Tài liệu tham khảo

1. P. S. Aleksandrov, *Einführung in die Mengenlehre und die allgemeine Topologie*, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1984 (Translated from Russian).
2. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, MA, 1957.
3. R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, Wiley, New York-London-Sydney, 1976.
4. R. P. Boas jr., *A Primer of Real Functions*, Math. Assoc. Amer., New York, 1960.
5. G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

6. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, 1–2 , Graylock (1957–1961) (Translated from Russian).
7. S. M. Nikol'skii, *A Course of Mathematical Analysis*, 1–2 , MIR, Moscow, 1977 (Translated from Russian).
8. V. A. Il'in, E. G. Poznyak, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, 1–2 , MIR, Moscow, 1982 (Translated from Russian).
9. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976, pp. 75–78.
10. K. R. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, CA, 1981.