

TÍNH ỔN ĐỊNH (stability of a solution)

Xét hệ phương trình

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

ở đây x^1, \dots, x^n là các ẩn hàm của biến thời gian t , còn $f^i, i = 1, \dots, n$ là các hàm đã cho của các biến t, x^1, \dots, x^n . Bằng các đặt

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n), \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f^1(t, \mathbf{x}), \dots, f^n(t, \mathbf{x})),$$

ta có thể biểu diễn hệ phương trình trên qua dạng véc tơ như sau

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (2)$$

Hàm véc tơ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad t \in I,$$

là nghiệm của hệ phương trình (1) hay phương trình véc tơ (2). Bài toán Cauchy cho hệ (2) là bài toán tìm lời giải của nó thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$x^1(t_0) = x_0^1, \dots, x^n(t_0) = x_0^n,$$

hay

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (3)$$

Giả sử các hàm số $f^i (i = 1, 2, \dots, n)$ có đạo hàm riêng bậc nhất liên tục. Lời giải của hệ phương trình này (ta ký hiệu là $x(t, t_0; x_0)$) được gọi là *ổn định theo nghĩa Lyapunov*, nếu với mỗi $\epsilon > 0$ luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x_0^i - \tilde{x}_0^i| < \delta, i = 1, 2, \dots, n$ thì trong khoảng $t_0 \leq t < \infty$ bất đẳng thức sau đây thỏa mãn

$$|x^i(t, t_0; x_0) - x^i(t, t_0; \tilde{x}_0)| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Lời giải của hệ phương trình vi phân trên có thể xem như chuyển động của chất điểm trong không gian n -chiều. Nếu điều kiện ổn định trên không

thỏa mãn, thì hệ được gọi là *không ổn định*. Lời giải $x(t, t_0; x_0)$ được gọi là không bị nhiễu, còn $x(t, t_0; \tilde{x}_0)$ được gọi là lời giải bị nhiễu. Ý nghĩa hình học của ổn định là tại mọi thời điểm $t \geq t_0$ điểm của chuyển động bị nhiễu nằm trong lân cận đủ nhỏ của điểm tương ứng của chuyển động không bị nhiễu. Nếu ta đặt $x^i(t, t_0; \tilde{x}_0) = x^i(t, t_0; x_0) + \bar{x}^i, i = 1, 2, \dots, n$, khi đó lời giải không bị nhiễu ứng với $\bar{x}^i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Để vấn đề xét tính ổn định của nghiệm tầm thường $\bar{x}^i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Để cho đơn giản, ta sẽ bỏ dấu gạch trên x_i . Khi đó vế phải của hệ phương trình $f^i(t, 0, \dots, 0) = 0$. Hệ $\frac{dx^i}{dt} = f^i, i = 1, 2, \dots, n$, có thể biểu diễn được dưới dạng

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \varphi_i(t, x^1, x^2, \dots, x^n), i = 1, 2, \dots, n,$$

với $a_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(t; 0, \dots, 0), i, j = 1, \dots, n$, không phụ thuộc vào t . Hệ

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, i = 1, 2, \dots, n,$$

được gọi là hệ tuyến tính hóa của hệ (2).

Điều kiện đủ để nghiệm tầm thường ổn định có thể mô tả như sau: 1) Giả sử tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$ có phần thực âm; 2) tất cả các hàm $\varphi_i(t, x^1, x^2, \dots, x^n)$ thỏa mãn điều kiện

$$|\varphi_i(t, x^1, x^2, \dots, x^n)| \leq M \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{1/2+\alpha},$$

với M được chọn một cách thích hợp, $\alpha > 0$. Khi đó lời giải tầm thường của hệ $\frac{dx^i}{dt} = f^i, i = 1, 2, \dots, n$, ổn định.

Nếu ít nhất một nghiệm của phương trình đặc trưng $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$ có phần thực dương, còn điều kiện 2) thỏa mãn, thì hệ không ổn định.

Để biết khi nào nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực âm, ta sử dụng dấu hiệu Routh-Hurwitz: Tất cả các nghiệm của phương trình

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_n > 0,$$

có phần thực không âm khi và chỉ khi tất cả các định thức sau dương

$$D_1 = a_1, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad (a_m = 0, \text{ nếu } m > n).$$

ĐINH NHỒ HỒ

Tài liệu tham khảo

1. W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 10th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2012.
2. M. Braun, *Differential Equations and their Applications*, fourth edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1955.
4. A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer, Dordrecht, 1988.
5. A. N. Tikhonov, A. B. Vasileva, A. G. Sveshnikov, *Differential Equations*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985.