TỔ HỢP TUYẾN TÍNH (linear combination)

Cho E là không gian véc tơ trên trường K và S là một tập hợp con của E. Để mô tả các véc tơ nhận được từ S thông qua các phép cộng véc tơ và nhân vô hướng, ta có khái niệm sau.

Định nghĩa. Véc tơ $x \in E$ được gọi là *tổ hợp tuyến tính* của S nếu x có thể viết dưới dạng

$$x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

với $a_1, \ldots, a_n \in K$ và $x_1, \ldots, x_n \in S$.

Người ta còn dùng cách viết

$$x = \sum_{x_i \in S} a_i x_i \ (a_i \in K)$$

để biểu thị một tổ hợp tuyến tính của S, trong đó ta quy ước chỉ có một số hữu hạn phần tử $a_i \neq 0$. Cách viết này đặc biệt tiện lợi khi ta xét các tổ hợp tuyến tính của một tập vô hạn.

Tập các tổ hợp tuyến tính của S đóng với phép cộng và phép nhân vô hướng của E.

- Tổng của hai tổ hợp tuyến tính của S cũng là tổ hợp tuyến tính của S:

$$\sum_{x_i \in S} a_i x_i + \sum_{x_i \in S} b_i x_i = \sum_{x_i \in S} (a_i + b_i) x_i.$$

- Tích vô hướng của một phần tử $c \in K$ với một tổ hợp tuyến tính của S cũng là tổ hợp tuyến tính của S:

$$c(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = (ca_1)x_1 + \cdots + (ca_n)x_n.$$

Vì vậy tập các tổ hợp tuyến tính của S lập nên một không gian con của E. Tập này được gọi là không gian con sinh bởi S hay là *bao tuyến tính* của S. Đây là không gian con nhỏ nhất của E chứa S.

Ví dụ.

- Bao tuyến tính của một véc tơ x là tập các véc tơ dạng cx, $c \in K$.
- Ký hiệu e_i là véc tơ $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ của K^n, trong đó tọa độ thứ i là 1 còn các tọa độ khác bằng 0. Do mọi véc tơ $x = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ có thể viết dưới dạng $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ nên K^n là bao tuyến tính của tập các véc tơ $e_1, \ldots, e_n$. Ta gọi các véc tơ này là *véc tơ đơn vị*.
- Bao tuyến tính của tập các đơn thức $\{t^i | i \geq 0\}$ trong không gian véc tơ $K[t]$ của các đa thức một biến t với hệ số trong K chính là $K[t]$ vì mọi đa thức có dạng $c_0 + c_1t + \ldots + c_nt^n$.

Trong nhiều trường hợp, một tổ hợp tuyến tính của S có thể viết dưới hai dạng
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$$
với hai hệ phần tử $a_1, \ldots, a_n$ và $b_1, \ldots, b_n$ khác nhau. Điều này phụ thuộc vào sự tồn tại mối quan hệ dạng
$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$$
với ít nhất một hệ số $c_i \neq 0$. Ta gọi mối quan hệ này là *không tầm thường* của S.

Tập S được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu S có mối quan hệ không tầm thường. Tên gọi này thể hiện ở đặc trưng: Tập S phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại một phần tử của S là tổ hợp tuyến tính của các phần tử khác của S.

Định nghĩa. Tập S khác rỗng được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu S không phụ thuộc tuyến tính, có nghĩa là mối quan hệ
$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$$
giữa các phần tử $x_1, \ldots, x_n \in S$ chỉ xảy ra khi $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Để cho tiện người ta coi tập rỗng $\emptyset$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ.

- Tập các véc tơ đơn vị $e_1, \ldots, e_n$ của K^n là độc lập tuyến tính vì $c_1e_1 + \ldots + c_ne_n = (c_1, \ldots, c_n) = 0$ chỉ khi $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

- Tập các đơn thức t^i, $i \geq 0$, là độc lập tuyến tính trong $K[t]$ vì $c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n = 0$ chỉ khi $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

NGÔ VIỆT TRUNG

Tài liệu tham khảo

1. Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.
2. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2019.
3. Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.
4. S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Springer, New York, 1997.