TÔ PÔ (topology)

Tên gọi tô pô được dịch từ topology, một từ gốc Hy Lạp, có nghĩa là môn nghiên cứu về vị trí. Chuyên ngành tô pô nghiên cứu những tính chất của các hình mà không bị thay đổi khi các hình này bị biến dạng liên tục (chẳng hạn như kéo dãn ra, co lại hoặc xoắn). Không giống như hình học cổ điển, tô pô không quan tâm đến các câu hỏi về khoảng cách và góc, mà chỉ quan tâm đến vị trí tương đối của các hình.

LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN

Nghiên cứu về tô pô được bắt đầu bởi Leonhard Euler (1707-1783). Bài báo năm 1736 của ông về Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg được coi là một trong những ứng dụng thực tiễn đầu tiên của tô pô. Vào năm 1750 Euler đã viết cho một người bạn rằng ông đã nhận ra tầm quan trọng của các cạnh trong một đa diện. Điều này dẫn đến công thức đa diện của ông, $V - E + F = 2$ (trong đó V, E và F lần lượt là số đỉnh, cạnh và mặt của đa diện). Một số nhà toán học coi công thức này như là định lý đầu tiên, báo hiệu sự ra đời của ngành tô pô.

Nhà toán học Carlfriedrich Gauss (1777-1855) đã nghiên cứu sự biến dạng của các nút dây và các bất biến. Những nhà toán học có đóng góp tiếp theo là Augustin-Louis Cauchy, Ludwig Schläfli, Johann Benedict Listing, Bernhard Riemann và Enrico Betti. Nhà toán học Listing đã giới thiệu thuật ngữ "Topologie" ở trong cuốn sách của ông có tên Vorstudien zur Topologie, viết bằng tiếng Đức vào năm 1847. Từ "Topology" tiếng Anh được sử dụng lần đầu năm 1883 trong bản cáo phó của Listing đăng trên tạp chí Nature để phân biệt "hình học định tính với hình học thông thường, trong đó chủ yếu nghiên cứu quan hệ định lượng".

Công việc của họ đã được nhà toán học Pháp Henri Poincaré (1854-1912) chỉnh sửa, củng cố và mở rộng mạnh mẽ. Có thể nói Poincaré là người đầu tiên nhận thức rõ tầm quan trọng của cách tiếp cận tô pô trong giải tích. Năm 1895, ông xuất bản công trình đột phá "Analysis Situs", trong đó đưa ra các khái niệm nền tảng của tô pô đại số hiện đại như đồng luân, đồng điều, nhóm cơ bản. Ông coi đa diện như các đối tượng cơ bản trong tô pô và suy ra các tính chất tô pô thông qua các phức đơn hình của các đa diện.

Chuyên ngành tô pô hiện đại phụ thuộc mạnh mẽ vào các ý tưởng của lý thuyết tập hợp, được phát triển bởi Georg Cantor vào cuối thế kỷ XIX. Ngoài việc thiết lập các ý tưởng cơ bản của lý thuyết tập hợp, Cantor đã xét tô pô của các tập điểm trong không gian Euclid trong các nghiên cứu của ông về chuỗi Fourier. Ông là người đưa ra các khái niệm như điểm tụ, tập mở, tập đóng trong không gian Euclid.

Một sự tổng quát hóa quan trọng đầu tiên của các nghiên cứu của Cantor là các công trình của Maurice Fréchet về không gian mê-tric vào năm 1906. Một không gian mê-tric được coi là trường hợp đặc biệt của không gian tô pô nói chung. Trên một không gian tô pô có thể có nhiều không gian mê-tric phân biệt. Năm 1914, Felix Hausdorff đặt ra thuật ngữ "không gian tô pô" và đưa ra định nghĩa mà ngày nay chúng ta gọi là không gian Hausdorff. Khái niệm không gian tô pô ngày nay, như là một mở rộng của không gian Hausdorff, được Kazimierz Kuratowski đưa ra vào năm 1922. Các lý thuyết này sau đó đã phát triển thành chuyên ngành tô pô Đại cương. Nó nghiên cứu các tính chất tô pô của tập điểm trong không gian tô pô tổng quát mà không thông qua các đa diện.

TƯƠNG ĐƯƠNG TÔ PÔ

Trong hình học Euclid thông thường, bạn có thể di chuyển vật xung quanh và lật chúng, nhưng bạn không thể kéo dài hoặc uốn cong chúng. Điều này được gọi là "bằng nhau" trong sách hình học. Hai hình được gọi là bằng nhau nếu bạn có thể đặt một hình trùng khít lên hình kia.

Trong hình học xạ ảnh, được phát minh ra trong thời kỳ Phục Hưng để hiểu bản vẽ phối cảnh, hai vật được coi là giống nhau nếu chúng là hình ảnh nhìn thấy của cùng một đối tượng. Ví dụ, nhìn thẳng vuông góc từ phía trên vào một cái đĩa trên mặt bàn, và cái đĩa trông tròn, giống như một vòng tròn. Nhưng đi bộ một vài bước và nhìn vào nó, và chiều ngang của nó có vẻ lớn hơn, giống như một hình elip, bởi vì các góc độ bạn đang nhìn. Các hình elip và hình tròn là tương đương xạ ảnh.

Một sự biến đổi liên tục chỉ yêu cầu hai điểm lúc đầu gần nhau thì sau khi biến dạng vẫn tương đối gần nhau. Trong tô pô, bất kỳ biến đổi liên tục nào mà quá trình biến đổi ngược lại cũng có thể thực hiện một cách liên tục đều được phép.

Trong quan điểm này, một hình tròn và hình vuông (có kích thước bất kỳ) là tương đương tô pô, vì hình tròn có thể được biến dạng liên tục thành hình vuông và ngược lại. Bạn chỉ cần kéo phần của vòng tròn để tạo các góc và sau đó làm thẳng các cạnh, để thay đổi hình tròn thành hình vuông. Để biến ngược lại hình vuông thành hình tròn, bạn chỉ cần 'làm mịn nó ra' để biến nó trở lại thành một vòng tròn. Cả hai hình đều có cùng một số tính chất hình học chẳng hạn như nếu vẽ trong mặt phẳng thì chúng đều chia mặt phẳng thành hai miền. Hay một tính chất khác là khi bỏ đi một điểm của chúng thì phần còn lại là một khoảng mở. Các tính chất này đều đúng với tất cả các hình tương đương tô pô với hình tròn.

Vòng tròn không giống với hình số 8, mặc dù bạn có thể quấn hai điểm ở trên một vòng tròn với nhau để tạo thành hình số 8 một cách liên tục. Nhưng khi bạn cố gắng thực hiện quá trình ngược lại, bạn phải phá vỡ kết nối ở điểm giữa của số 8 và điều này phá vỡ tính liên tục: các điểm gần trung tâm của số 8 bị tách làm đôi, trên các phía đối diện xa nhau của vòng tròn.

Bất kỳ sự biến dạng nào đòi hỏi phải đục thủng hoặc làm rách một bề mặt, hay ghép hai phần rời rạc của một hình với nhau, đều không được coi là một phép biến dạng tô pô. Chẳng hạn như không thể biến dạng một hình cầu thành hình xuyến. Ta nói hai hình này không tương đương tô pô với nhau.

Một ví dụ khác là xét các chữ cái in hoa. Chữ C, M, và Z là tương đương tô pô. Các chữ cái D, O, P, và R cũng tương đương tô pô. Nhưng không có chữ nào trong nhóm đầu tương đương tô pô với một chữ trong nhóm sau. Không có chữ nào khác trong bảng chữ cái có đặc tính tô pô tương đương với chữ cái B.

TÔ PÔ NHƯ MỘT CẤU TRÚC TRANG BỊ TRÊN TẬP HỢP

Thuật ngữ tô pô cũng được dùng để chỉ một khái niệm cụ thể trong ngành. Hiểu theo cách trực giác, cấu trúc tô pô trên một tập hợp cho biết mối quan hệ không gian giữa các phần tử của tập đó. Cùng một tập hợp có thể có các tô pô khác nhau. Ví dụ, đường thẳng thực, mặt phẳng phức hay tập Cantor có thể được coi là cùng một tập hợp với các cấu trúc tô pô khác nhau.

Một cách chính xác, cho X là một tập hợp và τ là một họ các tập con của X. Khi đó τ được gọi là *tô pô* trên X nếu:

i) Cả hai tập $\emptyset$ và X là các phần tử của τ,

ii) Hợp của một họ bất kỳ các phần tử thuộc τ cũng là một phần tử thuộc τ,

iii) Giao của hữu hạn các phần tử thuộc τ cũng là một phần tử thuộc τ.

Nếu τ là một tô pô trên X, thì cặp (X, τ) được gọi là một *không gian tô pô.*

Các tập thuộc τ được gọi là các tập mở trong X. Một tập hợp con của X được gọi là đóng nếu phần bù của nó là mở trong τ. Một tập hợp con của X có thể đồng thời vừa mở, vừa đóng. Chẳng hạn tập rỗng và X là những tập vừa mở, vừa đóng. Một tập mở có chứa một điểm x được gọi là một "lân cận" của x. Theo một nghĩa nào đó, các điểm trong cùng một lân cận có thể xem là "gần nhau". Ví dụ tập hợp $X = \{a, b, c, d\}$, và $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$ xác định một tô pô trên X thỏa mãn 3 điều kiện trên.

Ngày nay, chuyên ngành tô pô không chỉ là một công cụ cơ bản trong toán học mà bản thân nó còn là một trong những nhánh chính của toán học, nó bao gồm nhiều chuyên ngành hẹp như: tô pô đại cương, tô pô đại số, tô pô tổ hợp, tô pô vi phân, lý thuyết các đa tạp chiều thấp, ...

VŨ THẾ KHÔI

Tài liệu tham khảo

1. P. S. Alexandrov, *Elementary Concepts of Topology*, Dover, New York, 1961.
2. R. Bruner, *What is topology?*, http://www.math.wayne.edu/ rrb/topology.html.
3. T. Gowers, J. Barrow-Green and I. Leader, eds, *The Princeton companion to mathematics*, Princeton University Press, Ufrm-e010.
4. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1972.
5. H. Seifert and W. Threlfall, *A Textbook of Topology*, Academic Press, New York, 1980.
6. *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Topology.