TÔ PÔ ĐẠI CƯƠNG (general topology)

là chuyên ngành nghiên cứu các không gian tô pô tổng quát và các ánh xạ giữa chúng thông qua các định nghĩa và xây dựng trong khuôn khổ của lý thuyết tập hợp. Vì thế mà tô pô đại cương đôi khi còn được gọi là tô pô điểm-tập hợp. Chuyên ngành tô pô đại cương nảy sinh khi người ta nghiên cứu các bài toán sau:

- Nghiên cứu chi tiết về các tập hợp con của đường thẳng thực, hay trước đây được gọi là tô pô của các tập hợp điểm;
- Xây dựng khái niệm đa tạp;
- Nghiên cứu về không gian mêtric, đặc biệt là không gian tuyến tính định chuẩn trong những ngày đầu của lý thuyết giải tích hàm.

Ngày nay những khái niệm và kết quả của tô pô đại cương được sử dụng trong hầu hết mọi chuyên ngành toán học. Hai khái niệm khởi đầu cơ bản của tô pô đại cương là không gian tô pô và ánh xạ liên tục, được giới thiệu bởi nhà toán học Felix Hausdorff vào năm 1914.

Một *tô pô* trên tập hợp X là một họ các tập con τ của X, gọi là các tập mở, thỏa mãn một số tiên đề. Tập X cùng với một tô pô τ trên đó được gọi là không gian tô pô. Thông qua khái niệm tập mở này chúng ta có thể định nghĩa được tính chất "gần", "xa" giữa các phần tử của không gian. Từ đó có thể nói rằng một ánh xạ giữa hai không gian tô pô là *liên tục* nếu nó biến hai điểm "gần nhau" thành hai điểm "gần nhau".

Một trường hợp cụ thể của ánh xạ liên tục là phép *đồng phôi*, một song ánh liên tục giữa các không gian tô pô mà nghịch đảo của nó cũng liên tục. Các không gian có thể được ánh xạ vào nhau qua phép đồng phôi được coi là giống nhau trong tô pô đại cương. Một trong những vấn đề cơ bản trong tô pô đại cương là tìm ra và nghiên cứu các tính chất của không gian tô pô được bảo tồn dưới phép đồng phôi, được gọi là *bất biến tô pô*.

Tất nhiên, bất kỳ tính chất nào của không gian được xây dựng chỉ dựa vào tô pô trên đó sẽ tự động là một bất biến tô pô. Tính bất biến tô pô của những đối tượng được xây dựng với sự trợ giúp của các cấu trúc khác liên kết với tập hợp điểm của không gian đó, chẳng hạn như nhóm đồng điều, là hoàn toàn không hiển nhiên.

Ví dụ về bất biến số của không gian tô pô là số chiều tô pô, hay chiều Lebesgue, đây là số nguyên đặc trưng cho kích thước của không gian. Bất biến tô pô của không gian không nhất thiết phải biểu thị bằng một số. Chẳng hạn như tính liên thông, tính compact và khả năng mêtric hóa là các bất biến tô pô. Với các tính chất là bất biến tô pô, chúng ta có các lớp không gian tương ứng thỏa mãn các tính chất đó. Thông dụng nhất phải kể đến: không gian liên thông, không gian compact, không gian Hausdorff, không gian mêtric hóa được, ...

Những bài toán nội tại quan trọng của tô pô đại cương bao gồm:

1. Tìm ra những lớp không gian tô pô quan trọng mới;
2. So sánh giữa các lớp không gian tô pô khác nhau;
3. Nghiên cứu các không gian trong mỗi lớp không gian tô pô và các tính chất phạm trù trong mỗi lớp đó.

Để giải quyết bài toán thứ nhất, người ta thường phải xét thêm những cấu trúc khác tương thích tự nhiên với cấu trúc tô pô của không gian. Từ đó phân biệt các lớp không gian: không gian mêtric hóa được, không gian sắp thứ tự, không gian các nhóm tô pô, không gian đối xứng, ...

Phương pháp dùng các phủ cũng được sử dụng trong cả ba bài toán trên. Qua ngôn ngữ của phủ và mối liên hệ giữa các loại phủ ta có thể xây dựng lớp cơ bản cho các không gian compact và para compact, từ đó có thể phát biểu được nhiều tính chất tô pô liên quan đến khái niệm compact. Phương pháp phủ cũng đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết về chiều của các không gian tô pô.

Trong bài toán thứ hai, mối liên hệ giữa các không gian thông qua các ánh xạ thường được xem xét. Một không gian tổng quát, phức tạp có thể được mô tả như ảnh của một không gian đơn giản hơn qua một ánh xạ "tốt". Chẳng hạn như không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất có thể được đặc trưng như là ảnh của không gian mêtric qua một ánh xạ mở liên tục.

Phương pháp dùng các hệ trực tiếp hoặc hệ ngược của lý thuyết phạm trù cũng có mối liên hệ chặt chẽ với phương pháp dùng phủ và ánh xạ nêu trên. Nó cho phép mô tả một không gian phức tạp như là một hệ ánh xạ giữa các không gian đơn giản hơn.

Một phương pháp quan trọng khác trong việc nghiên cứu bài toán thứ hai là sử dụng các bất biến tô pô có giá trị là bản số của tập hợp. Các bất biến loại này phù hợp với bản chất lý thuyết tập hợp của tô pô đại cương. Theo hướng này, hệ các bất biến bản số có nhiều dạng khác nhau và trong thực tế có ảnh hưởng đến tất cả các tính chất tô pô khác. Một đặc tính quan trọng của các bất biến bản số là sự phụ thuộc lẫn nhau của chúng. Trên cơ sở đó ta có thể thực hiện các phép toán số học với các bất biến này và so sánh độ lớn của chúng. Nhờ đặc tính này, lý thuyết các bất biến bản số đóng vai trò hợp nhất các phần của tô pô đại cương.

Một bài toán đáng chú ý liên quan đến các ngành khác là: Các tính chất tô pô ảnh hưởng như thế nào đến các cấu trúc tương thích khác và quan hệ tương hỗ giữa chúng? Các cấu trúc tương thích cụ thể được xét đến ở đây liên quan đến nhóm tô pô, không gian véc tơ tô pô, độ đo trên không gian tô pô.

Chẳng hạn ứng với mỗi không gian compact Hausdorff ta có một đại số Banach các hàm thực liên tục trên đó. Như vậy lý thuyết không gian tô pô có liên hệ chặt chẽ với lý thuyết đại số Banach. Tô pô yếu trên đại số Banach đóng vai trò quan trọng trong giải tích hàm, chúng tạo thành một lớp các tô pô không mêtric hóa được có rất nhiều ứng dụng quan trọng. Mỗi không gian Tikhonov được đặc trưng một cách duy nhất qua vành các hàm thực liên tục trên đó trong tô pô hội tụ từng điểm. Các kết quả kiểu như vậy cho thấy mối liên kết tô pô đại cương với lý thuyết các đại số tô pô.

Tô pô đại cương đóng vai trò quan trọng trong giáo dục toán học. Các khái niệm cơ bản về tính liên tục, hội tụ và phép biến đổi liên tục chỉ có thể giải thích rõ ràng trong khuôn khổ của các khái niệm và xây dựng trong tô pô. Khó có thể tìm được một lĩnh vực nào của toán học mà không dùng đến các khái niệm và ngôn ngữ của tô pô đại cương. Vai trò của tô pô đại cương trong toán học còn thể hiện thông qua việc một loạt các nguyên lý và định lý quan trọng của toán học chỉ có thể được phát biểu một cách tự nhiên trong khuôn khổ của tô pô đại cương.

Chẳng hạn như khái niệm compact, sự trừu tượng hóa có nguồn gốc từ bổ đề Heine-Borel về việc trích ra được một phủ con hữu hạn của đoạn thẳng. Định lý về tính compact của tích hai không gian compact (sự mở rộng của việc hình hộp trong không gian hữu hạn chiều là compact) và định lý rằng hàm liên tục trên một không gian compact đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Các ví dụ nêu trên có thể mở rộng sang cho nhiều khái niệm khác trong tô pô đại cương như khái niệm tập thuộc phạm trù thứ hai, khái niệm đầy đủ, khái niệm mở rộng. Đặc tính của các khái niệm này và các kết quả liên quan tới chúng là quan trọng với toàn bộ toán học nói chung và việc nghiên cứu những khái niệm này là tự nhiên và trong sáng nhất khi được đặt trong khuôn khổ của tô pô đại cương.

VŨ THẾ KHÔI

Tài liệu tham khảo

1. J. L. Kelley, *General Topology*, Dover, New York, 2017.
2. J. R. Munkres, *Topology*, Prenctice Hall, US, 2000.
3. S. Willard, *General Topology*, Dover, New York, 2004.