VI PHÂN (differential)

Vi phân của một hàm là phần tuyến tính chính của số gia của nó.

HÀM MỘT BIẾN THỰC

Hàm một biến thực nhận giá trị thực f được gọi là khả vi tại điểm x nếu nó được xác định trong một lân cận của điểm này và tồn tại một số a sao cho số gia

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

có thể được viết dưới dạng

$$\Delta y = a\Delta x + \alpha,$$

với mọi điểm $x + \Delta x$ nằm trong lân cận này, trong đó $\alpha/\Delta x \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Biểu thức $a\Delta x$ thường được ký hiệu là dy và được gọi là vi phân của f tại x. Vi phân dy tỷ lệ thuận với Δx, tức là dy là một hàm tuyến tính của Δx. Theo định nghĩa, khi $\Delta x \to 0$ số hạng bổ sung α bé vô cùng với bậc cao hơn bậc của Δx (và cao hơn bậc của dy nếu $a \neq 0$). Đây là lý do tại sao vi phân được gọi là phần chính của số gia của hàm.

Đối với một hàm khả vi tại điểm x, $\Delta y \to 0$ nếu $\Delta x \to 0$, tức là một hàm khả vi tại một điểm thì cũng liên tục tại điểm đó. Một hàm f khả vi tại điểm x khi và chỉ khi nó có đạo hàm hữu hạn tại điểm đó:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a;$$

hơn thế nữa,

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Tồn tại hàm liên tục không khả vi.

Ký hiệu $df(x)$ có thể được sử dụng để thay thế dy. Khi đó phương trình trên có dạng

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Số gia của đối số Δx thường được ký hiệu là dx, và được xem là vi phân của biến độc lập. Vì vậy ta có thể viết

$$dy = f'(x)dx.$$

Hay $f'(x) = dy/dx$, tức là đạo hàm bằng tỷ số của các vi phân dy và dx. Nếu $a \neq 0$, thì $\Delta y/dy \to 1$ khi $\Delta x \to 0$, tức là nếu $a \neq 0$, thì Δy và dy là các đại lượng nhỏ có cùng bậc khi $\Delta x \to 0$; điều này cùng với cấu trúc đơn giản của vi phân (tức là tuyến tính đối với Δx), thường được sử dụng trong các phép tính gần đúng, bằng cách xem $\Delta y \approx dy$ với Δx đủ nhỏ. Ví dụ: nếu muốn tính $f(x + \Delta x)$ theo $f(x)$ đã biết khi Δx đủ nhỏ, ta xem

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

Rõ ràng là công thức gần đúng này chỉ hữu ích nếu có thể đánh giá được sai số một cách hiệu quả.

HÀM NHIỀU BIẾN THỰC

Các định nghĩa về tính khả vi và vi phân có thể được mở rộng cho hàm n biến thực nhận giá trị thực. Trong trường hợp $n = 2$ một hàm thực được gọi là khả vi tại điểm (x, y) đối với cả hai biến x và y nếu nó được xác định trong một lân cận của điểm này và nếu số gia tổng thể của nó

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

có thể viết được dưới dạng

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \alpha,$$

trong đó a và b là các số thực, $\alpha/\rho \to 0$ nếu $\rho \to 0$ với $\rho := \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ và giả thiết là điểm $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ thuộc lân cận nói trên.

Người ta ký hiệu

$$dz = df(x, y) := a\Delta x + b\Delta y$$

là vi phân của hàm f tại điểm (x, y). Đối với một điểm cho trước (x, y) vi phân dz là một hàm tuyến tính của Δx và Δy; hiệu $\alpha = \Delta z - dz$ là vô cùng bé có bậc cao hơn bậc của ρ. Theo nghĩa này dz là phần tuyến tính chính của số gia Δz.

Nếu f khả vi tại điểm (x, y), thì nó liên tục tại điểm này và có các đạo hàm riêng hữu hạn

$$f'_x(x, y) = a, \quad f'_y(x, y) = b$$

tại điểm này. Như vậy

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Cũng giống như trường hợp của một biến, số gia Δx và Δy của các biến độc lập thường được ký hiệu là dx và dy. Khi đó ta có thể viết

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Nhìn chung, sự tồn tại của đạo hàm riêng hữu hạn không kéo theo tính khả vi của hàm (ngay cả khi chúng liên tục).

Nếu một hàm f có đạo hàm riêng đối với x tại một điểm (x, y), tích $f'_x(x, y)dx$ được gọi là vi phân riêng của nó đối với x; tương tự, $f'_y(x, y)dy$ là vi phân riêng đối với y. Nếu hàm là khả vi, vi phân của nó bằng tổng các vi phân riêng.

Sau đây là một điều kiện đủ về tính khả vi của một hàm: Nếu trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) hàm f có đạo hàm riêng f'_x liên tục tại (x_0, y_0) và có đạo hàm riêng f'_y tại điểm này, thì f khả vi ở điểm đó.

Nếu một hàm f khả vi ở tất cả các điểm trên miền mở D, thì tại bất kỳ điểm nào của miền này ta có

$$dz = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

trong đó $a(x, y) = f'_x(x, y)$, $b(x, y) = f'_y(x, y)$. Ngoài ra, nếu tồn tại các đạo hàm riêng liên tục a'_y và b'_x trên D, thì

$$a'_y = b'_x$$

tại mọi điểm trên D. Đặc biệt, điều này chứng minh rằng không phải mọi biểu thức có dạng

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

với a liên tục và b trên miền D là vi phân của một hàm của hai biến. Đây là sự khác biệt so với các hàm của một biến, trong đó bất kỳ biểu thức nào $a(x)dx$ với một hàm liên tục a trong khoảng nào đó là vi phân của một hàm.

Biểu thức $a\,dx + b\,dy$ là vi phân của một hàm $z = f(x, y)$ trên miền mở đơn liên D nếu a và b liên tục trong miền này, thoả mãn điều kiện $a'_y = b'_x$

và: a'_y và b'_x liên tục; hoặc a và b khả vi ở mọi nơi trên D đối với cả hai biến x và y.

TỔNG QUÁT HÓA VÀ MỞ RỘNG

Cho hàm f được xác định trên tập hợp số thực $E \subset \mathbb{R}$, giả sử x là một điểm giới hạn của tập hợp này. Nếu $x \in E$, $x + \Delta x \in E$, $\Delta y = a\Delta x + \alpha$, với $\alpha/\Delta x \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì hàm f được gọi là khả vi đối với tập hợp E tại điểm x và $dy = a\Delta x$ được gọi là vi phân của nó đối với tập hợp E tại điểm x. Đây là tổng quát hóa về khái niệm vi phân của hàm một biến thực nhận giá trị thực. Dạng tổng quát hóa đặc biệt này bao gồm vi phân tại các điểm mút của khoảng mà hàm được xác định.

Vi phân của hàm nhiều biến thực nhận giá trị thực được trình bày theo cách tương tự.

Tất cả các định nghĩa và khái niệm về tính khả vi và vi phân được trình bày trên đây có thể được mở rộng hầu như không thay đổi cho hàm một hoặc nhiều biến thực nhận giá trị phức, cho hàm véc tơ một hoặc nhiều biến thực nhận giá trị thực hoặc phức và cho hàm phức một hoặc nhiều biến và hàm véc tơ phức. Trong giải tích hàm, chúng được mở rộng cho hàm xác đinh trên một không gian trừu tượng. Người ta còn có thể nói về tính khả vi và vi phân của hàm tập hợp đối với một độ đo.

ĐINH DŨNG

Tài liệu tham khảo

1. E. A. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1967.
2. G. M. Fichtenholz, *Differential und Integralrechnung*, 1–3 , Deutsch. Verlag Wissenschaft. (1964).
3. S. M. Nikol'skii, *A Course of Mathematical Analysis* 1–2 , MIR, Moscow, 1977.
4. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1953.
5. K. R. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, CA, 1981.
6. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, New York, 1952.
7. V. Zorich, *Mathematical Analysis*, Springer, Berlin, 2015.