XẤP XỈ TỐT NHẤT (best approximation)

XẤP XỈ TỐT NHẤT TRONG KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN

Cho X là một không gian định chuẩn trên trường số thực (phức), $f \in X$ và $F \subseteq X$. Khi đó

$$E(f, F) := \inf_{g \in F} \|f - g\| \tag{1}$$

được gọi là đại lượng xấp xỉ tốt nhất của f bằng F. Ở đây khoảng cách $\|f - g\|$ giữa hai phần tử f và g biểu thị sai số xấp xỉ f bằng g.

Nếu $F \subseteq X$ cố định đại lượng xấp xỉ tốt nhất $E(f, F)$ có thể được coi là một hàm được xác định trên X (hàm xấp xỉ tốt nhất).

Hàm xấp xỉ tốt nhất là liên tục trên X với bất kỳ F. Nếu F là không gian con, hàm của xấp xỉ tốt nhất là một nửa chuẩn, tức là

$$E(f_1 + f_2, F) \leq E(f_1, F) + E(f_2, F),$$

và

$$E(\lambda f, F) = |\lambda| E(f, F)$$

đối với bất kỳ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nếu F là không gian con hữu hạn chiều, khi đó với mọi $f \in X$ tồn tại một phần tử $g_0 \in F$ (được gọi là xấp xỉ tốt nhất) mà tại đó infimum trong (1) đạt được:

$$E(f, F) = \|f - g_0\|.$$

Trong không gian X với chuẩn lồi chặt, xấp xỉ tốt nhất là duy nhất.

Sử dụng các định lý đối ngẫu, đại lượng xấp xỉ tốt nhất trong không gian định chuẩn X có thể được biểu diễn dưới dạng cận trên các giá trị của một số phiếm hàm nhất định thuộc không gian đối ngẫu X^*. Nếu F là một tập con lồi đóng của X, khi đó với bất kỳ $f \in X$

$$E(f, F) = \sup_{\substack{f^* \in X^* \\ \|f^*\| \leq 1}} \left[f^*(f) - \sup_{g \in F} f^*(g) \right]. \tag{2}$$

Đặc biệt, nếu F là không gian con, thì

$$E(f,F) = \sup_{\substack{f^* \in F^\perp \\ \|f^*\| \leq 1}} f^*(f), \tag{3}$$

trong đó $F^\perp$ là tập hợp các phiếm hàm f^* thuộc X^* sao cho $f^*(g) = 0$ với bất kỳ $g \in F$.

XẤP XỈ TỐT NHẤT TRONG KHÔNG GIAN HÀM

Trong xấp xỉ hàm số, các hàm phức tạp được thay thế bằng các hàm đơn giản, thích hợp cho tính toán số. Cac hàm được dùng để xấp xỉ có thể là đa thức lượng giác, đa thức đại số, sóng nhỏ, đa thức từng phần, splines,... Người ta thường hạn chế các hàm như vậy bằng cách bắt chúng phải thuộc một không gian có số chiều hữu hạn, ví dụ, đa thức đại số có bậc nhỏ hơn một số n cho trước.

Trong các không gian hàm định chuẩn C hoặc L_p , các vế phải của (2) và (3) có dạng tường minh phụ thuộc vào dạng của phiếm hàm tuyến tính trên các không gian này.

Trong không gian Hilbert H, đại lượng xấp xỉ tốt nhất phần tử $f \in H$ bằng không gian con n chiều F_n nhận được bằng phép chiếu trực giao trên F_n và có thể tính toán được, ta có:

$$E(f,F_n) = \sqrt{\frac{G(f, g_1 \dots g_n)}{G(g_1 \dots g_n)}},$$

ở đây $g_1, \dots, g_n$ là cơ sở của F_n, và $G(g_1, \dots, g_n)$ là định thức Gram, các phần tử của chúng là tích vô hướng (g_i, g_j), $i, j = 1, \dots, n$, (cũng tương tự như vậy đối với $G(f, g_1 \dots g_n)$). Nếu $\{u_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn, thì

$$E^2(f,F_n) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, g_k)^2.$$

Trong không gian $C = C[a,b]$ ta có đánh giá sau đây cho đại lượng xấp xỉ tốt nhất của hàm $f \in C$ bằng không gian con Chebyshev n chiều $F_n \subseteq C$

(định lý de la Vallée-Poussin): Nếu đối với một hàm $g \in F_n$ tồn tại $n+1$ điểm x_k, $a \le x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$, sao cho hiệu

$$\Delta(x) = f(x) - g(x)$$

nhận các giá trị có dấu đan xen, khi đó

$$E(f, F_n) \ge \min_{1 \le k \le n+1} |\Delta(x_k)|.$$

Trong một số trường hợp quan trọng, đại lượng xấp xỉ tốt nhất hàm số bằng không gian con hữu hạn chiều có thể được đánh giá qua các đặc tính sai phân (ví dụ: mô đun liên tục) của hàm được xấp xỉ hoặc các đạo hàm của nó.

Khái niệm về xấp xỉ tốt nhất trong chuẩn hội tụ đều của các hàm liên tục bằng đa thức đại số thuộc về P.L. Chebyshev (1854), người đã phát triển cơ sở lý thuyết cho khái niệm này và thiết lập tiêu chuẩn đa thức xấp xỉ tốt nhất trong không gian metric C.

XẤP XỈ MỘT LỚP HÀM

Đại lượng xấp xỉ tốt nhất trong không gian định chuẩn X của một lớp hàm là giá trị cận trên của đại lượng xấp xỉ tốt nhất của các hàm f trong lớp hàm M bằng một lớp hàm cố định F, tức là đại lượng

$$E(M, F) := \sup_{f \in M} E(f, F).$$

Đại lượng $E(M, F)$ đặc trưng cho độ lệch của lớp M so với F và cho sai số xấp xỉ lớn nhất có thể khi tính gần đúng một hàm tùy ý $f \in M$ bằng các hàm của F.

Cho M là một tập con của không gian hàm định chuẩn X, và $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ là một hệ các hàm độc lập tuyến tính trong X và ký hiệu F_n, $n = 1, 2, \dots,$ là không gian con được sinh bởi n phần tử đầu tiên của hệ này. Bằng cách nghiên cứu dãy $E(M, F_n)$, $n = 1, 2, ...$, người ta có thể rút ra kết luận về cả đặc tính cấu trúc và tính trơn của các hàm trong M cũng như các tính chất xấp xỉ của hệ G đối với M. Nếu X là không gian hàm Banach và G là một hệ đóng trong X, tức là $\overline{\cup F_n} = X$, thì $E(M, F_n) \to 0$, $n \to \infty$, khi và chỉ khi M là tập hợp compact trong X.

Trong một số trường hợp quan trọng, ví dụ: khi F_n là không gian con của đa thức lượng giác hoặc các spline tuần hoàn và lớp M được xác định bởi các điều kiện áp lên mô đun liên tục của đạo hàm $f^{(r)}$, các đại lượng $E(M, F_n)$ có thể được đánh giá một cách tường minh. Trong trường hợp không tuần hoàn, cũng có các kết quả tương tự liên quan đến dáng điệu tiệm cận của $E(M, F_n)$ khi $n \to \infty$.

ĐINH DŨNG

Tài liệu tham khảo

1. N. I. [N.I. Akhiezer] Achiezer, *Theory of Approximation*, F. Ungar, New York, 1956.
2. E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, Chelsea, reprint, RI, 1982.
3. R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer, Berlin, 1993.
4. P. J. Laurent, *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
5. A. Pinkus, *N-widths in Approximation Theory*, Springer, Berlin, 1985.
6. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Springer, New York, 1975.
7. V. M. Tikhomirov, *Some Problems in Approximation Theory*, Moscow, 1976 (In Russian).
8. A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Pergamon, New York, 1963.